Estudio Analitico - Grafico de los Poliedros Regulares y de sus Derivados y Conjugados

LAMINAS 26 AL 32

V

Prof. T. Alvarez Peralto

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un exaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

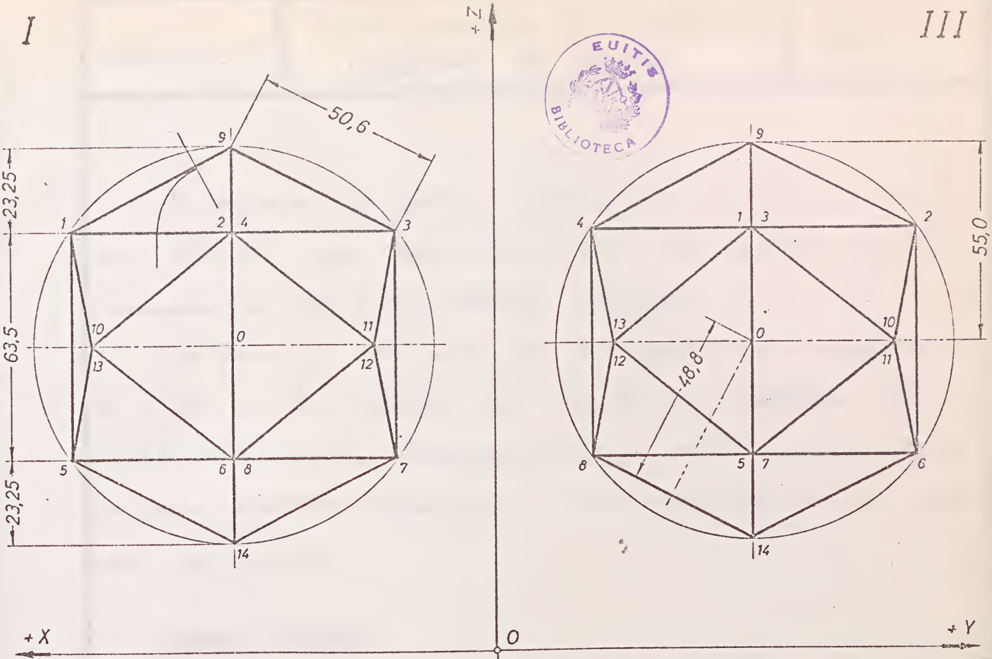
Las coordenadas del centro de la esfera son: 0 (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

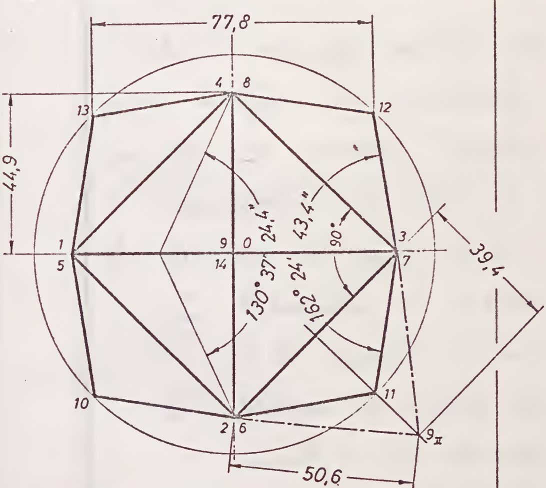
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

<u>DATOS</u>

0 (72, 72, 85) mm

a_6 = 55 mm





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un exaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro regular .... 1 al 8
Proyecciones centros caras del mismo
(vértices del octaedro conjugado) ..... 9 al 14

+Y

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1 : 1	Poliedro derivado del exaedro regular					Lámina 26

Al estudiar el ejercicio propuesto en la lámina 25, hemos obtenido unas deducciones previas de caracter general, comunes a los cinco poliedros regulares.

Las formulas allí deducidas las aplicaremos sucesivamente a los cuatro poliedros que quedan por estudiar. El desarrollo del cálculo correspondiente a esta lámina, seguirá pues aquellas directrices, a las que haremos las oportunas referencias.

PROCESO GRÁFICO

En el caso del poliedro derivado del exaedro regular, el proceso gráfico es inmediato, ya que sabemos que el conjugado del exaedro regular es el octaedro regular, y esta representación ha sido ya efectuada en el ejercicio de la lámina 23, cuyo proceso nos permite:

1º Representar el exaedro regular dado, de vértices 1 al 8, inscrito en una esfera de 55 mm de radio.

2º Obtener los vértices del octaedro conjugado 9 al 14, inscrito en la misma esfera (estos vértices se han de corresponder con los 11 al 16 de la lámina 23).

3º Unir los vértices 9 al 14 con los correspondientes de cada cara del exaedro dado.

Al terminar la representación del poliedro derivado, po-

demos observar que éste es un poliedro convexo, de

$C = 4 \times 6 = 24$ caras; (ver lám. 25, fórmula [1]); de

$V = 8 + 6 = 14$ vértices (ver lám. 25, fórmula [2]); y de

$A = 12 + 4 \times 6 = 36$ aristas (ver lám. 25, fórmula [3]).

La demostración de la convexidad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Calculemos previamente los siguientes valores deducidos de ejercicios anteriores, en función del radio a_6 (dato) de la esfera circunscrita al exaedro regular dado.

Número de caras "n" del exaedro dado

$$n = 6$$

Radio "a_6" de la esfera circunscrita al mismo (dato del ejercicio).

Lado "l_6" del exaedro dado

Se deduce de la fórmula 11, lám. 2.

$$l_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}\, a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_6$$

Lámina 26	Poliedros derivados de los regulares Derivado del exaedro	Hoja nº 3

Radio "c_6" de la esfera inscrita en el mismo

Se deduce de la fórmula 13, lám. 2.

$$c_6 = \frac{1}{2}\, l_6 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_6 = \frac{\sqrt{3}}{3}\, a_6$$

Radio "d_6" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del mismo.

Se deduce de la fórmula 14, lám. 2

$$d_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\, l_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3}\, a_6$$

Radio "k_6" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del mismo (apotema).

Se deduce de la fórmula 16, lám. 2

$$k_6 = \frac{1}{2}\, l_6 = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_6 = \frac{\sqrt{3}}{3}\, a_6$$

Angulo rectilíneo "$2\varphi_6$" del diedro del mismo.

Se deduce de la fórmula 15, lám. 2

$$\operatorname{sen} \varphi_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 2\varphi_6 = 90^\circ$$

Tomando como base los valores anteriores, deduciremos los siguientes del poliedro derivado.

Angulo rectilíneo "$2\alpha_6$" del diedro formado por dos ca-

(signature)		13 - 6 - 72

UNE A4 210 X 297

ras contiguas del poliedro derivado, en una arista del exaedro dado.

Se deduce de la fórmula general [4] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$tg\ \alpha_6 = \frac{a_6 .\ k_6}{(k_6)^2 - a_6\ c_6 + (c_6)^2} = \frac{a_6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_6}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2 - a_6 \frac{\sqrt{3}}{3} a_6 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2} = 2\sqrt{3} + 3$$

$$lg\ tg\ \alpha_6 = lg\left(2\sqrt{3}+3\right) = lg\ 6{,}46\ 41\ 01\ 6 \ldots \qquad 0{,}81\ 05\ 08\ 2 \ldots = tg\ \alpha_6$$

$$\alpha_6 = 81^\circ\ 12'\ 21{,}7'' \qquad 2\alpha_6 = 162^\circ\ 24'\ 43{,}4''$$

El valor de $\alpha_6 < 90^\circ$ nos demuestra la convexidad del poliedro derivado (ver lám. 25 "Consideraciones previas").

Altura "p" de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del exaedro dado (cara del poliedro derivado).

Se deduce de la fórmula [5] (ver lám. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$p = \sqrt{(a_6 - c_6)^2 + (k_6)^2} = \sqrt{\left(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\ a_6$$

Desarrollo del cálculo anterior: $p = \sqrt{\left(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a_6\right)^2} =$

$$= \sqrt{(a_6)^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{3}{9}(a_6)^2} = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{3}{9}}\ a_6 = \sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}}{9} + \frac{3}{9}}\ a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\ a_6}$$

Arista lateral "q" de la pirámide recta regular, o lado igual del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado.

Se deduce de la fórmula general [6] (ver lám. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$q = \sqrt{(a_6 - c_6)^2 + (d_6)^2} = \sqrt{\left(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} a_6\right)^2} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}}\, a_6$$

Desarrollo del cálculo anterior: $q = \sqrt{\left(a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} a_6\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}}\, a_6 = \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}}\, a_6 = \sqrt{\frac{9 + 3 - 6\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}}\, a_6 =$$

$$= \sqrt{\frac{18 - 6\sqrt{3}}{9}}\, a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{3}}{3}}\, a_6}$$

Diagonal "t" que se obtiene al unir los extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del exaedro dado.

Es la diagonal de un cuadrado, cuyo valor será

$$t = \sqrt{2}\, l_6 = \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 = \frac{2\sqrt{6}}{3} a_6$$

Ángulo rectilíneo del diedro "$2\gamma_6$" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta.

Se deduce de la fórmula general [7] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen}\gamma_6 = \frac{t\,q}{2\,l_6\,p} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}a_6 \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\,a_6}{2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}a_6 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\,a_6} = \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen}\gamma} = \dfrac{\frac{2\sqrt{6}}{3}a_6 \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\,a_6}{2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}a_6 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\,a_6} =$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3} : \frac{5-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{(6-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}{13}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{30-10\sqrt{3}+12\sqrt{3}-12}{13}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{18+2\sqrt{3}}{13}} = \sqrt{\frac{1}{2}\times\frac{18+2\sqrt{3}}{13}} = \boxed{\sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}}}$$

$$\operatorname{sen}\gamma_6 = \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}} = 0{,}90\ 85\ 93\ 6\ldots$$

$$\lg.\ \operatorname{sen}\gamma_6 = \bar{1},958\ 36\ 97 \qquad \gamma_6 = 65^\circ\ 18'\ 42{,}2''$$

$$2\gamma_6 = 130^\circ\ 37'\ 24{,}4''$$

<u>Radio "b_1" de la esfera tangente a las aristas del poliedro regular dado.</u>

Se deduce de la fórmula 12, lám. 2

$$b_1 = b_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_c = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6$$

<u>Angulo diedro "β_6" formado por una cara lateral de la pirámide y su base.</u>

Se deduce de la fórmula general [8] (ver condiciones previas, lám. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen} \beta_6 = \frac{a_6 - c_6}{p} = \frac{a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6} = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{3}}{13}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen} \beta_6} = \dfrac{a_6 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_6}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6} =$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}} = \frac{(3-\sqrt{3}) \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}}{3 \times \frac{5-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{(3-\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}{13} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{15 - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 6}{13} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{9+\sqrt{3}}{13} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{\frac{(9+\sqrt{3})^2 (5-2\sqrt{3})}{13^2 \times 3}} = \sqrt{\frac{(81+3+18\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}{13^2 \times 3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(84+18\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}{13^2 \times 3}} = \sqrt{\frac{6\times(14+3\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}{13^2\times 3}} = \sqrt{\frac{2\times(70-22\sqrt{3}+15\sqrt{3}-12)}{13^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\times(53-13\sqrt{3})}{13^2}} = \sqrt{\frac{2\times(4-\sqrt{3})}{13}} = \boxed{\sqrt{\frac{8-2\sqrt{3}}{13}}}$$

El valor numérico de β_6, expresado en grados sexagesimales, es el siguiente:

$$\text{sen}\ \beta_6 = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{3}}{13}} = 0{,}59\ 06\ 90\ 5 \qquad \text{lg sen}\ \beta_6 = \bar{1},7713\ 600$$

$$\beta_6 = 36^\circ\ 12'\ 21{,}7''$$

debiendo verificarse como comprobación (ver fórm. [11], consideraciones previas, lám. 25) que

$$\alpha_6 = \varphi_6 + \beta_6 = 45^\circ + 36^\circ\ 12'\ 21{,}7'' = 81^\circ\ 12'\ 21{,}7''$$

valor coincidente al ya obtenido de α_6.

<u>Radio "b_2" de la esfera tangente a las aristas laterales de las pirámides rectas cuyas bases son caras del exaedro regular dado.</u>

Se deduce de la fórmula general [9] (ver consideraciones previas, lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$b_2 = \sqrt{(a_6)^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{(a_6)^2 - \left(\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\,a_6\right)^2 : 4} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\ a_6$$

Lámina 26	Poliedros derivados de los regulares Derivado del exaedro	Hoja nº 7

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{b_2} = \sqrt{(a_6)^2 - \left(\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6\right)^2 : 4} =$

$$= \sqrt{(a_6)^2 - \frac{6-2\sqrt{3}}{3} : 4\,(a_6)^2} = \sqrt{1 - \frac{3-\sqrt{3}}{6}}\, a_6 = \sqrt{\frac{6-3+\sqrt{3}}{6}}\, a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_6}$$

Radio "c_1" de la esfera inscrita en el poliedro derivado

Se deduce de la fórmula general [10] (ver consideraciones previas, lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_6$ siendo $b_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6$ y $\operatorname{tg} \alpha_6 = 2\sqrt{3}+3$

pero $\operatorname{sen} \alpha_6 = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha_6}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_6}} = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{1+(2\sqrt{3}+3)^2}}$ de donde

$$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6 \times \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{1+(2\sqrt{3}+3)^2}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{13}}\, a_6$$

Desarrollo del cálculo anterior; $c_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_6 \times \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{1+(2\sqrt{3}+3)^2}} =$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{1+12+9+12\sqrt{3}}}\, a_6 = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{2\times(11+6\sqrt{3})}}\, a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{6}\times\sqrt{2\times(11+6\sqrt{3})}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{2\times(11+6\sqrt{3})}\, a_6 = \frac{\sqrt{12\,(11+6\sqrt{3})}}{3} \times \frac{(2\sqrt{3}+3)(11-6\sqrt{3})}{2\times(121-108)}\, a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{12\,(11+6\sqrt{3})}}{3.} \times \frac{(2\sqrt{3}+3)(11-6\sqrt{3})}{2\times 13}\, a_6 = \frac{\sqrt{12\,(11+6\sqrt{3})(11-6\sqrt{3})^2}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{2\times 13}\, a_6$$

$$= \frac{\sqrt{3 \times (11 - 6\sqrt{3}) \times (121 - 108)} \times (2\sqrt{3} + 3)}{3 \times 13} a_6 = \frac{\sqrt{3 \times 13 \times (11 - 6\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 3)^2}}{3 \times 13} a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{3 \times 13 \times (11 - 6\sqrt{3})(12 + 9 + 12\sqrt{3})}}{3 \times 13} a_6 = \frac{\sqrt{3 \times 13 \times (11 - 6\sqrt{3})(21 + 12\sqrt{3})}}{3 \times 13} a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{3 \times 3 \times 13 \times (11 - 6\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3})}}{3 \times 13} a_6 = \frac{\sqrt{13 \times (77 - 42\sqrt{3} + 44\sqrt{3} - 72)}}{13} a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{13 \times (5 + 2\sqrt{3})}}{13} a_6 = \sqrt{\frac{13 \times (5 + 2\sqrt{3})}{13^2}} a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{3}}{13}} a_6}$$

Este mismo valor se puede deducir de la fórmula equivalente [10'] (lám. 25), en la que

$$\boxed{c_1} = b_2 \operatorname{sen} \gamma_6 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} a_6 \times \sqrt{\frac{9 + \sqrt{3}}{13}} = \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{3})(9 + \sqrt{3})}{6 \times 13}} a_6 =$$

$$= \sqrt{\frac{27 + 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3}{6 \times 13}} a_6 = \sqrt{\frac{30 + 12\sqrt{3}}{6 \times 13}} a_6 = \boxed{\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{3}}{13}} a_6}$$

Area lateral "S" del poliedro derivado

Se obtiene como suma de las áreas laterales de las seis pirámides rectas de base cuadrada, cuyas caras son triángulos isósceles de base "l_6" y altura "p", ya determinados.

(sigue en hoja 11)

$$S = 6 \times 4 \times \frac{l_6 \times P}{2} = 6 \times 4 \times \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} a_6}{2} = 8\sqrt{5-2\sqrt{3}}\,(a_6)^2$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{S} = 6 \times 4 \times \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} a_6}{2} =$

$$= \frac{6 \times 4 \times 2}{3 \times 2} \sqrt{3} \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}} (a_6)^2 = 8 \sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3} \times (\sqrt{3})^2}\, a_6^2 = \boxed{8\sqrt{5-2\sqrt{3}}\,(a_6)^2}$$

Volumen "V" del poliedro derivado

Se obtiene como suma del volumen del exaedro dado y de las seis pirámides de sus caras.

$$V = V_6 + 6 \times \frac{S_4 \times h}{3}$$

siendo "S_4" el área de una cara del exaedro, y "h" la altura de la pirámide.

Para obtener V_6 en función de a_6, ver lám. 2, fórm. 19 y 11, que nos dan

$$V_6 = (l_6)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a_6\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}} (a_6)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9} (a_6)^3$$

Por otra parte tendremos que

$S_4 = (l_6)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} a_6\right)^2 = \frac{4}{3} (a_6)^2$ y también que (ver lám. 2, fórm. 11 y 13)

$$h = a_6 - c_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_6 - \frac{1}{2} l_6 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times l_6 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} a_6 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} a_6 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} a_6$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]
[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]
[illegible]

[illegible]
[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible]
[illegible]

y finalmente:

$$V = V_6 + 6 \times \frac{S_4 \cdot h}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{9}(a_6)^3 + 6 \times \frac{\frac{4}{3}(a_6)^2 \times \frac{3-\sqrt{3}}{3} a_6}{3} = \frac{8}{3}(a_6)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{V} = \frac{8\sqrt{3}}{9}(a_6)^3 + 6 \times \frac{\frac{4}{3}(a_6)^2 \times \frac{3-\sqrt{3}}{3} a_6}{3} =$

$$= \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{6 \times 4 \times (3-\sqrt{3})}{9 \times 3}\right)(a_6)^3 = \left(\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8(3-\sqrt{3})}{9}\right)(a_6)^3 =$$

$$= \frac{8}{9}\left(\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3}\right)(a_6)^3 = \boxed{\frac{8}{3}(a_6)^3}$$

(sigue en h. 13)

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores.

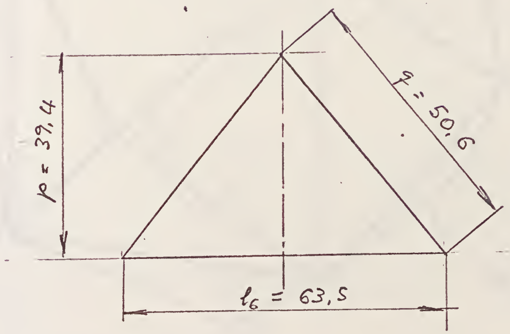
CUADRO SINÓPTICO

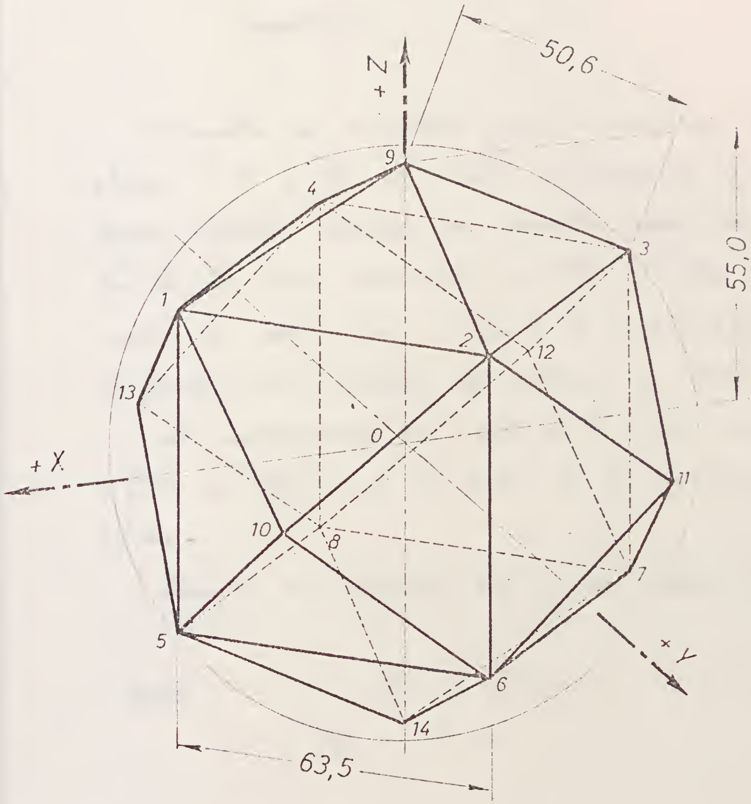
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
252 l_6	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_6$	$1,\ 15\ 47\ 01 \dots a_6$
253 b_1	$\frac{\sqrt{6}}{3}\, a_6$	$0,\ 81\ 64\ 97 \dots a_6$
254 b_2	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_6$	$0,\ 88\ 80\ 74 \dots a_6$
255 c_6	$\frac{\sqrt{3}}{3}\, a_6$	$0,\ 57\ 73\ 50 \dots a_6$
256 c_1	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{13}}\, a_6$	$0,\ 80\ 68\ 98 \dots a_6$
257 d_6	$\frac{\sqrt{6}}{3}\, a_6$	$0,\ 81\ 64\ 97 \dots a_6$
258 k_6	$\frac{\sqrt{3}}{3}\, a_6$	$0,\ 57\ 73\ 50 \dots a_6$
259 $2\varphi_6$	$\operatorname{sen} \varphi_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{sen} \varphi_6 = 0,70\ 71\ 07$ $2\varphi_6 = 90^\circ$
260 $2\alpha_6$	$\operatorname{tg} \alpha_6 = 2\sqrt{3}+3$	$\operatorname{tg} \alpha_6 = 0,81\ 05\ 08$ $2\alpha_6 = 162^\circ\ 24'\ 43,4''$
261 $2\gamma_6$	$\operatorname{sen} \gamma_6 = \sqrt{\frac{9+\sqrt{3}}{13}}$	$\operatorname{sen} \gamma_6 = 0,90\ 85\ 94$ $2\gamma_6 = 130^\circ\ 37'\ 24,4''$
262 β_6	$\operatorname{sen} \beta_6 = \sqrt{\frac{8-2\sqrt{3}}{13}}$	$\operatorname{sen} \beta_6 = 0,59\ 06\ 91$ $\beta_6 = 36^\circ\ 12'\ 21,7''$
263 p	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6$	$0,\ 71\ 55\ 18 \dots a_6$
264 q	$\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_6$	$0,\ 91\ 94\ 02 \dots a_6$
265 t	$\frac{2\sqrt{6}}{3}\, a_6$	$1,\ 63\ 29\ 93 \dots a_6$
266 S	$8\sqrt{5-2\sqrt{3}}\,(a_6)^2$	$9,\ 91\ 45\ 09 \dots (a_6)^2$
267 V	$\frac{8}{3}(a_6)^3$	$2,\ 66\ 66\ 67 \dots (a_6)^3$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 24 caras iguales en forma de triángulo isósceles, de base $l_6 = 63.5$ mm y altura $p = 39.4$ mm.; en este triángulo el lado igual q, tiene el valor $q = 50.6$ mm (comprobación).

Para obtener este poliedro se formarán previamente 6 pirámides rectas de base cuadrada de lado "l_6"; cuyas caras laterales son 4 triángulos (ver figura) acoplados por su lado "q".





Póliedro derivado del exaedro regular

Lámina 27	POLIEDROS DERIVADOS DE LOS REGULARES A) Por proyección de los centros de las caras.	27

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un octaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

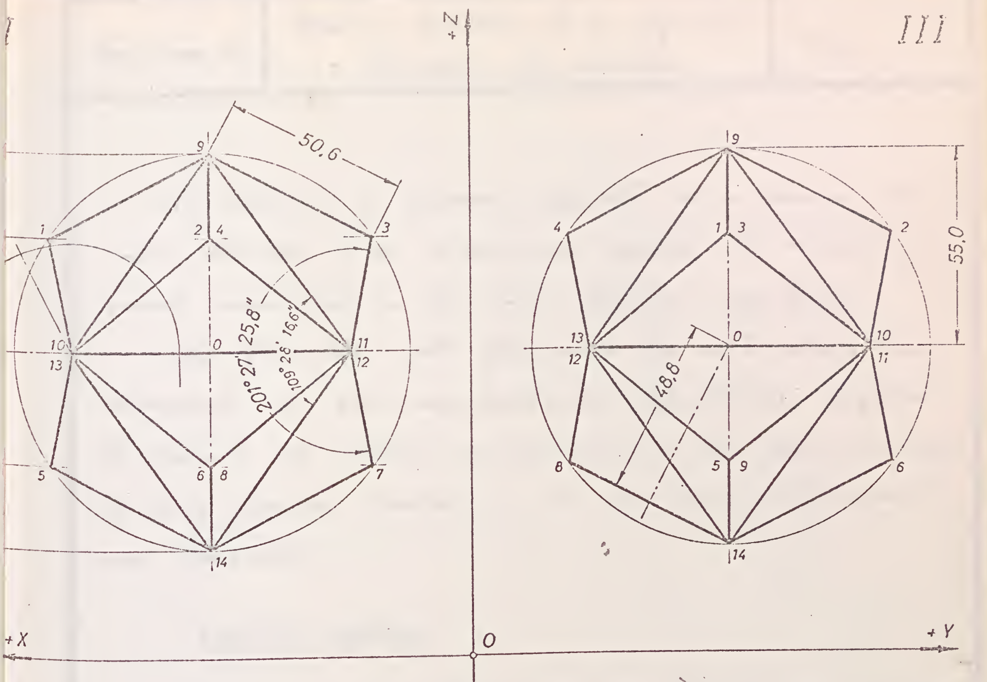
Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma, de 55 mm.

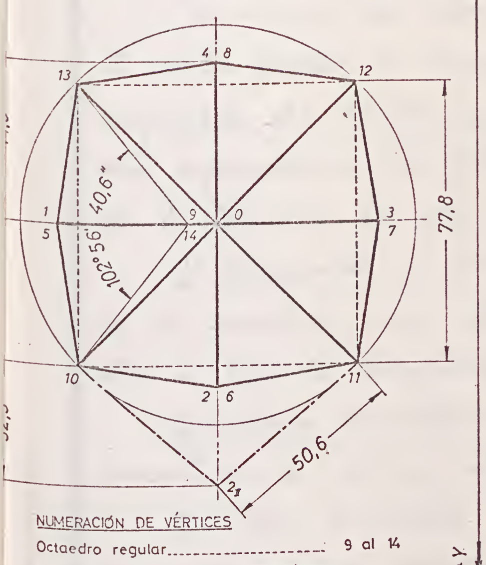
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS O (72, 72, 85) mm

a_8 = 55 mm.

CCl		6 - 7 - 72





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III el poliedro derivado de un octaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Octaedro regular.................... 9 al 14

Proyecciones centros caras del mismo

(vértices del exaedro conjugado)..... 1 al 8

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela
Fecha:						Curso
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedro derivado del octaedro regular					Lámina 27
						Curso 19 - 19

Al estudiar el ejercicio propuesto en la lámina 25, hemos obtenido unas deducciones previas de carácter general, comunes a los cinco poliedros regulares.

Las fórmulas allí deducidas las aplicaremos sucesivamente en este caso particular del octaedro regular. El desarrollo del cálculo correspondiente a esta lámina, seguirá pues aquellas directrices, a las que haremos las oportunas referencias.

PROCESO GRÁFICO

En el caso del poliedro derivado del octaedro regular, el proceso gráfico es inmediato, ya que sabemos que el conjugado del octaedro regular es el exaedro regular, y esta representación ha sido ya efectuada en el ejercicio de la lámina 23, cuyo proceso nos permite:

1º Representar el octaedro regular dado, de vértices 9 al 14, inscrito en una esfera de 55 mm de radio (estos vértices se han de corresponder con los 11 al 16 de la lám. 23).

2º Obtener los vértices del exaedro conjugado 1 al 8, inscrito en la misma esfera.

3º Unir los vértices 1 al 8 con los correspondientes de cada cara del octaedro dado.

Al terminar la representación del poliedro derivado, po

demos observar que éste es un poliedro cóncavo, de

$C = 3 \times 8 = 24$ caras (ver lám. 25, fórm. [1]); de

$V = 6 + 8 = 14$ vértices (ver lám. 25, fórm. [2]); y de

$A = 12 + 3 \times 8 = 36$ aristas (ver lám. 25, fórm. [3])

La demostración de la concavidad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Calculemos previamente los siguientes valores deducidos de ejercicios anteriores, en función del radio a_8 (dato) de la esfera circunscrita al octaedro regular dado.

Número de caras "n" del octaedro dado

$$n = 8$$

Radio "a_8" de la esfera circunscrita al mismo (dato del ejercicio).

Lado "l_8" del octaedro dado

Se deduce de la fórmula 21, lám. 3

$$l_8 = \frac{2}{\sqrt{2}}\, a_8 = \sqrt{2}\, a_8$$

Radio "b_1" de la esfera tangente a las aristas del po-

liedro regular dado.

Se deduce de la fórmula 22; lám. 3

$$b_1 = b_8 = \frac{1}{2} l_8 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}\ a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$$

Radio "c_8" de la esfera inscrita en el mismo

Se deduce de la fórmula 23, lám. 3.

$$c_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} l_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2}\ a_8 = \frac{\sqrt{12}}{6} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_8$$

Radio "d_8" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del mismo.

Se deduce de la fórmula 24, lám. 3.

$$d_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} l_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{2}\ a_8 = \frac{\sqrt{6}}{3} a_8$$

Radio "k_8" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del mismo (apotema)

Se deduce de la fórmula 26, lám. 3.

$$k_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} l_8 = \frac{\sqrt{3}}{6} \sqrt{2}\ a_8 = \frac{\sqrt{6}}{6} a_8$$

Ángulo rectilíneo "$2\varphi_8$" del diedro del mismo.

Se deduce de la fórmula 25, lám. 3

$$\operatorname{sen} \varphi_8 = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad 2\varphi_8 = 109^\circ\ 28'\ 16{,}6''$$

Tomando como base los valores anteriores, deduciremos los siguientes del poliedro derivado.

<u>Angulo rectilíneo "$2\alpha_8$" del diedro formado por dos caras contiguas del poliedro derivado, en una arista del octaedro dado.</u>

Se deduce de la fórmula general [4] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$tg.\ \alpha_8 = \frac{a_8\ k_8}{(k_8)^2 - a_8\ c_8 + (c_8)^2} = \frac{a_8 \times \frac{\sqrt{6}}{6} a_8}{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} a_8\right)^2 - a_8 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a_8\right)^2} =$$

$$= -\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{tg\ \alpha_8} = \frac{a_8 \times \frac{\sqrt{6}}{6} a_8}{\left(\frac{\sqrt{6}}{6} a_8\right)^2 - a_8 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a_8\right)^2} =$

$$= \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{6}{36} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{9}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{1 - 2\sqrt{3} + 2}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3 - 2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}\left(3 + 2\sqrt{3}\right)}{9 - 12} = -\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{18}}{3} = -\frac{3\sqrt{6} + 6\sqrt{2}}{3} = \boxed{-\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right)}$$

El valor numérico de α_8, en grados sexagesimales, será:

$$tg\ \alpha_8 = -\left(\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\right) = -5,27\ 79\ 16\ 9\ldots = tg\left(\pi - \delta\right) = -tg\ \delta$$

$$tg\ \delta = 5,27\ 79\ 16\ 9$$

$\lg \operatorname{tg} \delta = \lg 5,2779169.. = 0,7224626 \qquad \delta = 79^\circ\ 16'\ 17,1''$

$\alpha_8 = 180^\circ - 79^\circ\ 16'\ 17,1'' = 100^\circ\ 43'\ 42,9''$ y $2\alpha_8 = 201^\circ\ 27'\ 25,8''$

El valor de $\alpha_8 > 90^\circ$ nos demuestra la concavidad del poliedro derivado (ver lám. 25, "Consideraciones previas").

Altura "p" de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del octaedro dado (cara del poliedro derivado).

Se deduce de la fórmula general [5] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$p = \sqrt{(a_8 - c_8)^2 + (k_8)^2} = \sqrt{\left(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6} a_8\right)^2} = \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{6}}\ a_8$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{p} = \sqrt{\left(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3} a_8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6} a_8\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 (a_8)^2 + \frac{6}{36}(a_8)^2} = \sqrt{\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}} \times a_8 = \sqrt{\frac{9 + 3 - 6\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{6}} \cdot a_8 =$$

$$= \sqrt{\frac{12 - 6\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{6}} \times a_8 = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{6}} \cdot a_8 = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{3} + 1}{6}}\ a_8 = \boxed{\sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{3}}{6}}\ a_8}$$

Arista lateral "q" de la pirámide recta regular, o lado igual del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado.

Se deduce de la fórmula general [6] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$q = \sqrt{(a_8 - c_8)^2 + (d_8)^2} = \sqrt{\left(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a_8\right)^2} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_8$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{q} = \sqrt{\left(a_8 - \frac{\sqrt{3}}{3}a_8\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a_8\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}} \cdot a_8 = \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{6}{9}} \times a_8 = \sqrt{\frac{9+3-6\sqrt{3}}{9} + \frac{6}{9}} \cdot a_8 =$$

$$= \sqrt{\frac{18-6\sqrt{3}}{9}}\, a_8 = \boxed{\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_8}$$

Segmento "t" que se obtiene al unir los extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del octaedro dado.

Es el tercer lado del triángulo equilátero de la cara, por lo que

$$t = l_8 = \sqrt{2} \times a_8$$

Ángulo rectilíneo del diedro "$2\gamma_8$" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta.

Se deduce de la fórmula general [7] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{sen} \gamma_8 = \frac{t\,q}{2\, l_8\, p} = \frac{\sqrt{2}\, a_8 \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}} \cdot a_8}{2 \times \sqrt{2}\, a_8 \cdot \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}\, a_8} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\text{sen}\,\gamma_8} = \dfrac{\sqrt{2}\, a_8 \sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_8}{2\sqrt{2}\, a_8 \sqrt{\dfrac{9-4\sqrt{3}}{6}}\, a_8} =$

$$= \frac{\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}}}{2\sqrt{\dfrac{9-4\sqrt{3}}{6}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3} : \frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(6-2\sqrt{3})}{9-4\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(6-2\sqrt{3})(9+4\sqrt{3})}{81-48}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(54-18\sqrt{3}+24\sqrt{3}-24)}{33}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(30+6\sqrt{3})}{33}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(10+2\sqrt{3})}{11}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\cdot(5+\sqrt{3})}{11}} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}}}$$

$$\text{sen}\,\gamma_8 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}} = 0,78\ 23\ 07\ 2 \qquad \lg \text{sen}\,\gamma_8 = \bar{1},8933\ 773$$

$$\gamma_8 = 51^\circ\ 28'\ 20,3'' \qquad 2\gamma_8 = 102^\circ\ 56'\ 40,6''$$

<u>Ángulo diedro "β_8" formado por una cara lateral de la pirámide y su base</u>

Se deduce de la fórmula general [8] (ver condiciones previas, lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\text{sen}\,\beta_8 = \frac{a_8 - c_8}{p} = \frac{a_8 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}a_8}{\sqrt{\dfrac{9-4\sqrt{3}}{6}}\,a_8} = \sqrt{\frac{24-4\sqrt{3}}{33}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\text{sen}\,\beta_8} = \dfrac{a_8 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}a_8}{\sqrt{\dfrac{9-4\sqrt{3}}{6}}\,a_8} =$

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}}{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} : \frac{9-4\sqrt{3}}{6}\right) \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{6\times(3-\sqrt{3})}{3\times(9-4\sqrt{3})} \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \frac{2\,(3-\sqrt{3})(9+4\sqrt{3})}{81-48} \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{2\,(27-9\sqrt{3}+12\sqrt{3}-12)}{33}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \frac{2\times(15+3\sqrt{3})}{33}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} =$$

$$= \frac{2\,(5+\sqrt{3})}{11}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(5+\sqrt{3})^2}{6}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(25+3+10\sqrt{3})}{6}} =$$

$$= \frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(28+10\sqrt{3})}{6}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{(9-4\sqrt{3})(14+5\sqrt{3})}{3}} = \frac{2}{11}\sqrt{\frac{126-56\sqrt{3}+45\sqrt{3}-60}{3}} =$$

$$= \frac{2}{11}\sqrt{\frac{66-11\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{\frac{11\,(6-\sqrt{3})}{3\times 11^2}} = \sqrt{\frac{4\,(6-\sqrt{3})}{33}} = \boxed{\sqrt{\frac{24-4\sqrt{3}}{33}}}$$

$$\operatorname{sen}\beta_8 = \sqrt{\frac{24-4\sqrt{3}}{33}} = 0{,}71\;92\;54\;6\ldots \qquad \lg \operatorname{sen}\beta_8 = \bar{1},8568\;827$$

$\beta_8 = 45^\circ\ 59'\ 34{,}6''$ debiendo verificarse como comprobación (ver fórm. [11], lám. 25)

$$\alpha_8 = \varphi_8 + \beta_8 = \begin{array}{r} 54^\circ\ 44'\ 8{,}3'' \\ +\ 45^\circ\ 59'\ 34{,}6'' \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha_8 = \underline{\underline{100^\circ\ 43'\ 42{,}9''}}$$

valor coincidente con el ya obtenido de α_8

Radio "b_2" de la esfera tangente a las aristas laterales de las pirámides rectas cuyas bases son caras del octaedro regular dado.

Se deduce de la fórmula general [9] (ver consideraciones previas, lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso

$$b_2 = \sqrt{(a_8)^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{(a_8)^2 - \left(\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_8\right)^2 : 4} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{b_2} = \sqrt{(a_8)^2 - \left(\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\, a_8\right)^2 : 4} =$

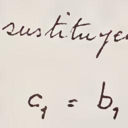
$$= \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{3}}{3 \times 4}} \cdot a_8 = \sqrt{1 - \frac{3-\sqrt{3}}{6}}\, a_8 = \sqrt{\frac{6-3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8 = \boxed{\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8}$$

Radio "c_1" de la esfera inscrita en el poliedro derivado.

Se deduce de la fórmula general [10] (ver lám. 25) sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_8$, siendo $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_8$ y $\operatorname{tg} \alpha_8 = -(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})$

$$\text{pero} \quad \operatorname{sen} \alpha_8 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_8}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_8}} = \frac{-(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})}{\sqrt{1 + \left(-(\sqrt{6} + 2\sqrt{2})\right)^2}} = -\sqrt{\frac{18 + 8\sqrt{3}}{33}}$$



pero estando α_8 comprendido entre π y $\frac{\pi}{2}$, el $\operatorname{sen} \alpha_8$ será positivo, por lo que

$$\operatorname{sen} \alpha_8 = \sqrt{\frac{18 + 8\sqrt{3}}{33}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\text{sen } \alpha_8} = \dfrac{-(\sqrt{6}+2\sqrt{2})}{\sqrt{1+\left(-(\sqrt{6}+2\sqrt{2})\right)^2}} =$

$$= -\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{\sqrt{1+(\sqrt{6}+2\sqrt{2})^2}} = -\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{\sqrt{1+6+8+4\sqrt{12}}} = -\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{\sqrt{15+8\sqrt{3}}} =$$

$$= -\frac{(\sqrt{6}+2\sqrt{2})\times\sqrt{15+8\sqrt{3}}}{15+8\sqrt{3}} = -\frac{(\sqrt{6}+2\sqrt{2})(15-8\sqrt{3})}{15^2-64\times 3}\times\sqrt{15+8\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{15\sqrt{6}+30\sqrt{2}-8\sqrt{18}-16\sqrt{6}}{33}\times\sqrt{15+8\sqrt{3}} = -\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{15+8\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{1}{33}\times\sqrt{(15+8\sqrt{3})(6\sqrt{2}-\sqrt{6})^2} = -\frac{1}{33}\sqrt{(15+8\sqrt{3})(72+6-12\sqrt{12})} =$$

$$= -\frac{1}{33}\times\sqrt{(15+8\sqrt{3})(78-24\sqrt{3})} = -\frac{1}{33}\sqrt{6\times(15+8\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})} =$$

$$= -\frac{1}{33}\sqrt{6\times(195+104\sqrt{3}-60\sqrt{3}-96)} = -\frac{1}{33}\sqrt{6\times(99+44\sqrt{3})} =$$

$$= -\frac{1}{33}\sqrt{6\times 11\times(9+4\sqrt{3})} = -\sqrt{\frac{6\times 11\times(9+4\sqrt{3})}{33\times 33}} = -\sqrt{\frac{2\times(9+4\sqrt{3})}{33}} =$$

$= \boxed{-\sqrt{\dfrac{18+8\sqrt{3}}{33}}}$ y por consiguiente, tendremos pues

$$c_1 \doteq b_1 \text{ sen } \alpha_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}\times a_8\times\sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{33}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}}\, a_8$$

Este mismo valor se puede deducir de la fórmula equivalente [10'] (lám. 25), en la que

$$c_1 = b_2 \text{ sen } \gamma_8 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8 \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}} = \sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}}\, a_8$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{c_1} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\, a_8 \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}} =$

$$= \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}{6\times 11}}\, a_8 = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{6\times 11}}\, a_8 = \sqrt{\frac{18+8\sqrt{3}}{6\times 11}}\, a_8 =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}}\, a_8}$$

Área lateral "S" del poliedro derivado

Se obtiene como suma de las áreas laterales de las ocho pirámides rectas de base triangular equilátera, (de lado "l_8"), cuyas caras laterales son triángulos isósceles de base "l_8" y altura "p", ya determinados.

$$S = 8\times 3 \times \frac{l_8 \times p}{2} = 12\times \sqrt{2}\, a_8 \times \sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}\, a_8 = 12\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}}\,(a_8)^2$$

Volumen "V" del poliedro derivado

Se obtiene como suma del volumen del octaedro dado y de las ocho pirámides formadas en sus caras.

$$V = V_8 + 8\times\frac{S_3 \times h}{3}$$

siendo "S_3" el área de una cara del octaedro, y "h" la altura de la pirámide.

Para obtener V_8 en función de a_8, ver lám. 3, fórms. 28 y 21, que nos dan

$$V_8 = \frac{\sqrt{2}}{3}(l_8)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \times (\sqrt{2}\, a_8)^3 = \frac{4}{3}(a_8)^3$$

Por otra parte, tendremos que

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}(l_8)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}\, a_8)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(a_8)^2$$

y también que (ver lám. 3, fórms. 21 y 23)

$$h = a_8 - c_8 = a_8 - \frac{\sqrt{6}}{6} l_8 = a_8 - \frac{\sqrt{6}}{6} \times \sqrt{2}\, a_8 = \frac{\sqrt{12}}{6} a_8 = \frac{\sqrt{3}}{3} a_8$$

y finalmente

$$V = V_8 + 8 \times \frac{S_3 \times h}{3} = \frac{4}{3}(a_8)^3 + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(a_8)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8 = \frac{8}{3}(a_8)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $V = \frac{4}{3}(a_8)^3 + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}(a_8)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} a_8 =$

$$= \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right)(a_8)^3 = \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right)(a_8)^3 = \frac{8}{3}(a_8)^3$$

Cuyo resultado nos demuestra que "El volumen del poliedro derivado del octaedro regular es el doble del volumen de éste"

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores:

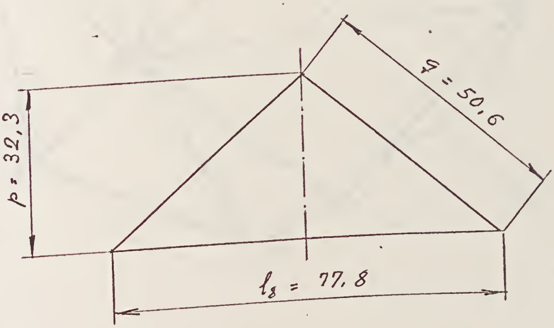
CUADRO SINÓPTICO

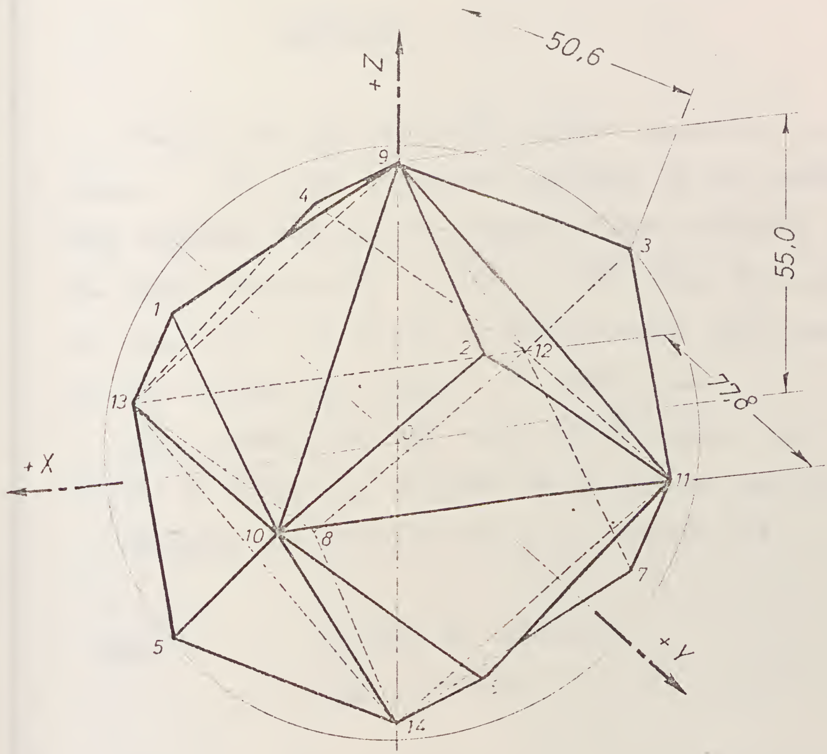
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
268 l_8	$\sqrt{2}\ a_8$	$1,414214\ldots a_8$
269 b_1	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ a_8$	$0,707107\ldots a_8$
270 b_2	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}\ a_8$	$0,888074\ldots a_8$
271 c_8	$\frac{\sqrt{3}}{3}\ a_8$	$0,577350\ldots a_8$
c_1	$\sqrt{\frac{9+4\sqrt{3}}{33}}\ a_8$	$0,694747\ldots a_8$
d_8	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ a_8$	$0,816497\ldots a_8$.
k_8	$\frac{\sqrt{6}}{6}\ a_8$	$0,408248\ldots a_8$
$2\varphi_8$	$\text{sen}\ \varphi_8 = \frac{\sqrt{6}}{3}$	$\text{sen}\ \varphi_8 = 0,816497$ $2\varphi_8 = 109°\ 28'\ 16,6''$
$2\alpha_8$	$\text{tg}\ 2\alpha_8 = -(\sqrt{6}+2\sqrt{2})$	$\text{tg}\ \alpha_8 = -5,277917$ $2\alpha_8 = 201°\ 27'\ 25,8''$
$2\gamma_8$	$\text{sen}\ \gamma_8 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{11}}$	$\text{sen}\ \gamma_8 = 0,782307$ $2\gamma_8 = 102°\ 56'\ 40,6''$
β_8	$\text{sen}\ \beta_8 = \sqrt{\frac{24-4\sqrt{3}}{33}}$	$\text{sen}\ \beta_8 = 0,719255$ $\beta_8 = 45°\ 59'\ 34,6''$
p	$\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{6}}\ a_8$	$0,587622\ldots a_8$
q	$\sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}\ a_8$	$0,919402\ldots a_8$
t	$\sqrt{2}\ a_8$	$1,414214\ldots a_8$
S	$12\sqrt{\frac{9-4\sqrt{3}}{3}}\ (a_8)^2$	$9,972274\ldots (a_8)^2$
V	$\frac{8}{3}\ (a_8)^3$	$2,666667\ldots (a_8)^3$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 24 caras iguales en forma de triángulo isósceles, de base l_8 = 77,8 mm y altura p = 32,3 mm; en este triángulo el lado q, tiene el valor q = 50,6 mm (comprobación).

Para obtener este poliedro se formarán previamente 8 pirámides rectas de base triangular equilátera de lado "l_8," cuyas caras laterales son 3 triángulos (ver figura) acoplados por su lado "q"





Poliedro derivado del octaedro regular

Lámina 28	POLIEDROS DERIVADOS DE LOS REGULARES A) Por proyección de los centros de las caras	28

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera, son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma, de 55 mm.

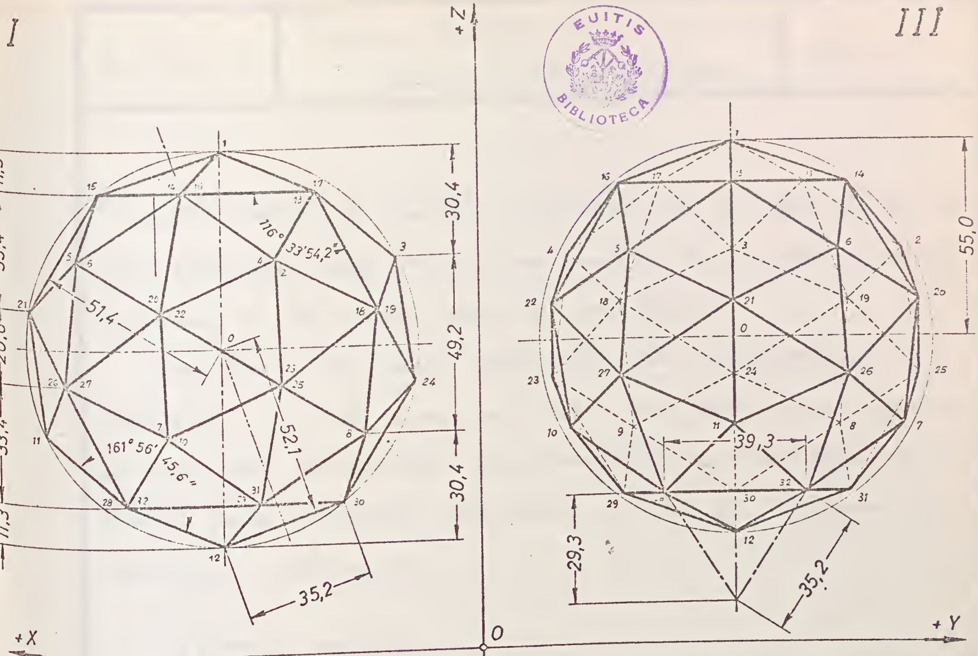
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

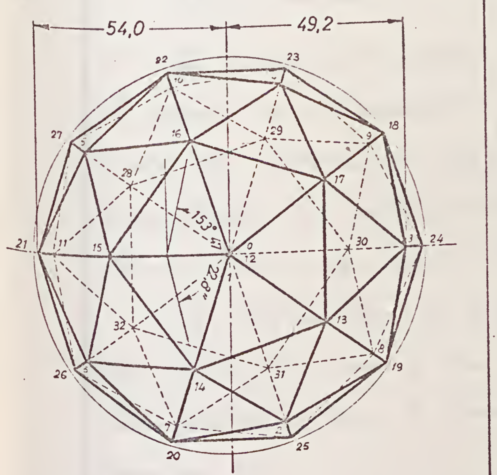
DATOS

O (72, 72, 85) mm

a_{12} = 55 mm.

10 - 7 - 72





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

Las coordenadas del centro de la esfera son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Dodecaedro regular .... 13 al 32
Proyecciones centros caras del mismo (vértices del icosaedro conjugado)--- 1 al 12

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedro derivado del dodecaedro regular					Lámina 28 Curso 19 -19

Al estudiar el ejercicio propuesto en la lámina 25, hemos obtenido unas deducciones previas de carácter general, comunes a los cinco poliedros regulares.

Las fórmulas allí deducidas las aplicaremos sucesivamente en este caso particular del dodecaedro regular. El desarrollo del cálculo correspondiente a esta lámina, seguirá pues aquellas directrices, a las que haremos las oportunas referencias.

PROCESO GRÁFICO.

En el caso del poliedro derivado del dodecaedro regular, el proceso es inmediato, ya que sabemos que el conjugado del dodecaedro regular es un icosaedro, y esta representación ha sido ya realizada en el ejercicio de la lámina 24, cuyo proceso nos permite:

1º Representar el dodecaedro regular dado, de vértices 13 al 32, inscrito en una esfera de 55 mm de radio (estos vértices se han de corresponder con los 21 al 40 de la lámina 24).

2º Obtener los vértices 1 al 12 del icosaedro conjugado inscrito en la misma esfera.

3º Unir los vértices 1 al 12 con los correspondientes de cada cara del dodecaedro dado.

Al terminar la representación del poliedro derivado, podemos comprobar que éste es un poliedro convexo, de

$C = 5 \times 12 = 60$ caras (ver lám. 25, fórm. [1]); de

$V = 12 + 20 = 32$ vértices (ver lám. 25, fórm. [2]); y de

$A = 30 + 5 \times 12 = 90$ aristas (ver lám. 25, fórm. [3]).

La demostración de la convexidad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Calculemos previamente los siguientes valores deducidos de ejercicios anteriores, en función del radio a_{12} (dato) de la esfera circunscrita al dodecaedro regular dado.

Número de caras "n" del dodecaedro dado

$$n = 12$$

Radio "a_{12}" de la esfera circunscrita al mismo (dato del ejercicio).

Lado "l_{12}" del dodecaedro dado.

Se deduce de la fórm. 30, lám. 4

$$l_{12} = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{3}}\, a_{12} = \frac{4\,(\sqrt{15} - \sqrt{3})}{12}\, a_{12} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{3}\, a_{12}$$

Radio "b_1" de la esfera tangente a las aristas del poliedro regular dado.

Se deduce de la fórmula 31, lám. 4

$$b_1 = b_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\, a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{b_1} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} =$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12}\, a_{12} = \frac{3\sqrt{15}+\sqrt{75}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}}{12}\, a_{12} = \frac{2\sqrt{15}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{12}\, a_{12} =$$

$$= \frac{2\sqrt{15}+2\sqrt{3}}{12}\, a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\, a_{12}}$$

Radio "c_{12}" de la esfera inscrita en el mismo.

Se deduce de la fórm. 32, lám. 4

$$c_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}}\, l_{12} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{c_{12}} = \sqrt{\frac{11\sqrt{5}+25}{40}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{40 \times 3^2}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(15+3-2\sqrt{45})}{40 \times 9}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(11\sqrt{5}+25)(18-6\sqrt{5})}{40 \times 9}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{(25+11\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}{40 \times 3}}\, a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{150+66\sqrt{5}-50\sqrt{5}-22\times 5}{40 \times 3}}\, a_{12} = \sqrt{\frac{40+16\sqrt{5}}{40\times 3}}\, a_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}}$$

Radio "d_{12}" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del mismo.

Se deduce de la fórm. 33, lám. 4

$$d_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{d_{12}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{10 \times 3^2}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(15+3-2\sqrt{45})}{10 \times 3^2}} \cdot a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(18-6\sqrt{5})}{10 \times 9}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{15}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{15}}\; a_{12} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12}}$$

Radio "k_{12}" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del mismo (apotema).

Se deduce de la fórmula 39, lám. 4

$$k_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}}\; l_{12} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\; a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{k_{12}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{20}} \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12} =$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}{20 \times 3^2}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(15+3-2\sqrt{45})}{20 \times 9}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(18-6\sqrt{5})}{20 \times 9}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{10 \times 3}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{15 + 6\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 10}{30}}\, a_{12} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}}$$

Ángulo rectilíneo "$2\varphi_{12}$" del diedro del mismo

Se deduce de la fórmula 34, lám. 4

$$\operatorname{sen} \varphi_{12} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \qquad 2\varphi_{12} = 116^\circ\ 33'\ 54{,}2''$$

Tomando como base los valores anteriores, deduciremos los siguientes del poliedro derivado.

Ángulo rectilíneo. "$2\alpha_{12}$" del diedro formado por dos caras contiguas del poliedro derivado, en una arista del dodecaedro dado.

Se deduce de la fórmula general [4.] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{a_{12}\, k_{12}}{(k_{12})^2 - a_{12}\, c_{12} + (c_{12})^2} = \frac{a_{12} \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}}{\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}\right)^2 - a_{12}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12} + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)^2}$$

$$= 3 + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{tg} \alpha_{12}} = \dfrac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}}{\frac{5+\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5+2\sqrt{5}}{15}} =$

$$= \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}}{\frac{5+\sqrt{5}+10+4\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}}{\frac{15+5\sqrt{5}}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})}}{(15+5\sqrt{5})-\sqrt{60\,(5+2\sqrt{5})}} = \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})}}{5\,(3+\sqrt{5})-2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{25\times(9+5+6\sqrt{5})-4\times 15\times(5+2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{350+150\sqrt{5}-300-120\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{50+30\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})} \times (3\sqrt{5}-5) \times \left[5\,(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10\,(3\sqrt{5}+5)\,(3\sqrt{5}-5)} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)^2} \times \left[5\,(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10\,(45-25)} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})(45+25-30\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10\times 20} =$$

$$= \frac{\sqrt{30\,(5+\sqrt{5})(70-30\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10\times 20} =$$

$$= \frac{\sqrt{300\,(5+\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{10\times 20} =$$

$$= \frac{\sqrt{3\,(35+7\sqrt{5}-15\sqrt{5}-15)} \times \left[5\,(3+\sqrt{5})+2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\right]}{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{3\,(20-8\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\,\right]}{20} =$$

$$= \frac{\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})} \times \left[5\,(3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}\,\right]}{10} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})} \times (3+\sqrt{5}) + 2\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})} \times \sqrt{15\,(5+2\sqrt{5})}}{10} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})\,(3+\sqrt{5})^2} + 2\sqrt{45\,(5-2\sqrt{5})\,(5+2\sqrt{5})}}{10} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})\,(9+5+6\sqrt{5})} + 2\times 3\times\sqrt{5\,(25-20)}}{10} =$$

$$= \frac{5\sqrt{3\,(5-2\sqrt{5})\,(14+6\sqrt{5})} + 30}{10} = \frac{\sqrt{3\times 2\,(5-2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})} + 6}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6\,(35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)} + 6}{2} = 3 + \sqrt{\frac{6\,(5+\sqrt{5})}{4}} = 3 + \sqrt{\frac{3\,(5+\sqrt{5})}{2}} =$$

$$= \boxed{3 + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}}$$

El valor numérico de α_{12} en grados sexagesimales, será:

$\operatorname{tg} \alpha_{12} = 3 + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}} = 6,2945564..;$ $\quad \lg \operatorname{tg} \alpha_{12} = 0,7989651$

$\alpha_{12} = 80^\circ\ 58'\ 22,8''.$ $\qquad 2\alpha_{12} = 161^\circ\ 56'\ 45,6''$

El valor $\alpha_{12} < 90^\circ$ nos demuestra la convexidad

del poliedro derivado (ver lám. 25, "Consideraciones previas").

Altura "p" de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del dodecaedro dado (cara del poliedro derivado).

Se deduce de la fórmula general [5] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$p = \sqrt{(a_{12} - c_{12})^2 + (k_{12})^2} = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12}. \qquad \left(= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{30}}\; a_{12}\right)$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{p} = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{30}}\, a_{12}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 (a_{12})^2 + \frac{5+\sqrt{5}}{30}(a_{12})^2} = \sqrt{1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{5+\sqrt{5}}{30}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{30+10+4\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{30} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12} = \sqrt{\frac{45+5\sqrt{5}}{30} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12}}$$

Arista lateral "q" de la pirámide recta regular, o lado igual del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado.

Se deduce de la fórmula general [6] (ver lám. 25) susti-

Luyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$q = \sqrt{(a_{12} - c_{12})^2 + (d_{12})^2} = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12} \qquad \left(= \sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12} \right)$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{q} = \sqrt{\left[a_{12} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 (a_{12})^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}(a_{12})^2} = \sqrt{1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\; a_{12} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5+2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{15} - 2.\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12} = \boxed{\sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\; a_{12}}$$

Segmento "t" que se obtiene al unir los extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del dodecaedro dado.

Es la diagonal del pentágono regular de lado l_{12}; su valor s/ la geometría racional, se obtiene

$$t = \frac{d_{12}}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\, a_{12}}{2} \times \sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_{12}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{t} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\, a_{12} =$

$$= \frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{2\sqrt{15}}\, a_{12} = \frac{\sqrt{80}}{2\sqrt{15}}\, a_{12} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{15}}\, a_{12} = 2\sqrt{\frac{5}{15}}\, a_{12} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}\, a_{12}}$$

Lámina 28	Poliedros derivados de los regulares Derivados del dodecaedro	Hoja nº 10

Ángulo rectilíneo del diedro "$2\gamma_{12}$" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta.

Se deduce de la fórmula general [7] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\text{sen}\ \gamma_{12} = \frac{t\,q}{2\,\ell_{12}\ p} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} a_{12} \times \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{12}}{2 \times \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} a_{12} \times \sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{12}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}} \times \frac{q}{p} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{q}{p} = \frac{0{,}80\ 90\ 17\ 0 \times 0{,}64\ 08\ 51\ 8}{0{,}53\ 23\ 24\ 2} = 0{,}97\ 39\ 55\ 4\ldots$$

$$\boxed{\text{sen}\ \gamma_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\left[2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] : \left[\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]}}$$

$\lg\ \text{sen}\ \gamma_{12} = \lg\ 0{,}97\ 39\ 55\ 4 = \bar{1}{,}9885\ 391$

$\gamma_{12} = 76°\ 53'\ 41{,}4''$ $\qquad 2\gamma_{12} = 153°\ 47'\ 22{,}8''$

Ángulo diedro "β_{12}" formado por una cara lateral de la pirámide y su base.

Se deduce de la fórmula general [8] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\text{sen}\ \beta_{12} = \frac{a_{12} - c_{12}}{p} = \frac{a_{12} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\ a_{12}}{\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{12}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}{\sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}}$$

El valor numérico de β_{12}, se obtiene como sigue:

$$\operatorname{sen} \beta_{12} = \frac{1 - 0,79\ 46\ 54\ 5 \ldots}{0,53\ 23\ 24\ 2 \ldots} \cong 0.38\ 57\ 52\ 7 \ldots$$

$$\lg.\ \operatorname{sen} \beta_{12} = \log.\ 0,38\ 57\ 52\ 7 = \bar{1},58\ 63\ 090$$

$\underline{\beta_{12} = 22°\ 41'\ 25,7''}$ debiendo verificarse como comprobación (ver fórm. [11], lám. 25)

$$\alpha_{12} = \varphi_{12} + \beta_{12} = \begin{array}{r} 58°\ 16'\ 57,1'' \\ +\ \underline{22°\ 41'\ 25,7''} \end{array}$$

$$\underline{\underline{\alpha_{12} = 80°\ 58'\ 22,8''}}$$

valor coincidente con el ya obtenido en este estudio

<u>Radio "b_2" de la esfera tangente a las aristas laterales de las pirámides rectas cuyas bases son caras del dodecaedro regular dado.</u>

Se deduce de la fórmula general [9] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$b_2 = \sqrt{(a_{12})^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{1 - \left(2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : 4} \quad a_{12} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : 2} \quad a_{12}$$

Radio "c_1" de la esfera inscrita en el poliedro derivado

Se deduce de la fórmula general [10] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_{12} \qquad \text{en la que} \qquad b_1 = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6} a_{12}, \quad y$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{12} = 3 + \sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}};$$

de esta última se obtiene:

$$\operatorname{sen} \alpha_{12} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{12}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_{12}}} = \frac{3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{1+\left(3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}\right)^2}} \qquad \text{por lo que}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6} \times \frac{3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}}{\sqrt{1+\left(3+\sqrt{\frac{15+3\sqrt{5}}{2}}\right)^2}}\, a_{12}} = 0{,}93\ 41\ 72\ 4 \operatorname{sen} \alpha_{12}\, a_{12}$$

$$\lg \frac{c_1}{a_{12}} = \log 0.93\ 41\ 72\ 4 + \lg \operatorname{sen} 80^\circ\ 58'\ 22{,}8'' = \begin{array}{r} \bar{1},970\ 42\ 70 \\ \bar{1},994\ 58\ 75 \\ \hline \bar{1},965\ 01\ 45 \end{array}$$

$$c_1 = 0.92\ 26\ 02\ 1 \times a_{12}$$

Este mismo valor se puede deducir, como comprobación, de la fórmula equivalente [10'] (ver lám. 25), en la que

$$c_1 = b_2 \operatorname{sen} \gamma_{12} = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2} \times \operatorname{sen} \gamma_{12} \times a_{12}$$

cuyos valores numéricos son:

$$C_1 = 0{,}94\,72\,73\,6\ldots \times \text{sen.}\,76^\circ\,53'\,41{,}4'' \times a_{12} =$$

$$= 0{,}94\,72\,73\,6\ldots \times 0{,}97\,39\,55\,4 \times a_{12} = 0{,}92\,26\,02\,2\ldots\, a_{12}$$

$$\boxed{C_1 = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2} \times \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]:\left[\frac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]} \times a_{12}}$$

valor coincidente con el ya obtenido anteriormente.

Área lateral "S" del poliedro derivado

Se obtiene como suma de las áreas laterales de las doce pirámides rectas de base pentagonal regular de lado "l_{12}", cuyas caras laterales son triángulos isósceles de base "l_{12}" y altura "p" ya determinados.

$$S = 12 \times 5 \times \frac{l_{12} \times p}{2} = 30 \times \frac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{\frac{9+\sqrt{5}}{6} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} \times (a_{12})^2$$

$$= 30 \times 0{,}71\,36\,44\,2\ldots \times 0{,}53\,23\,24\,2\ldots\,(a_{12})^2 = 11{,}39\,67\,02\,3\,(a_{12})^2$$

Volumen "V" del poliedro derivado

Se obtiene como suma del volumen del dodecaedro dado y de las doce pirámides formadas en sus caras.

$$V = V_{12} + 12 \times \frac{S_5 \times h}{3}$$

siendo "S_5" el área de una cara del dodecaedro, y "h" la altura de la pirámide.

Para obtener V_{12} en función de a_{12}, ver lám. 4, fórms. 41 y 30 que nos dan

$$V_{12} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4}\left(l_{12}\right)^3 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\, a_{12}\right)^3 = \frac{2\left(5\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{9}\left(a_{12}\right)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{V_{12}} = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\, a_{12}\right)^3 =$

$$= \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{4\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)}{15-3}\, a_{12}\right)^2 = \frac{7\sqrt{5}+15}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12}\right)^3 =$$

$$= \frac{\left(7\sqrt{5}+15\right) \times \left(15\sqrt{15} - 3 \times 15 \times \sqrt{3} + 3\sqrt{15} \times 3 - 3\sqrt{3}\right)}{4 \times 27}\left(a_{12}\right)^3 =$$

$$= \frac{\left(7\sqrt{5}+15\right) \times \left(24\sqrt{15} - 48\sqrt{3}\right)}{4 \times 27}\left(a_{12}\right)^3 = \frac{\left(7\sqrt{5}+15\right)\left(\sqrt{15}-2\sqrt{3}\right) \times 6}{27}\left(a_{12}\right)^3 =$$

$$= \frac{6 \times \left(7\sqrt{75} + 15\sqrt{15} - 14\sqrt{15} - 30\sqrt{3}\right)}{27}\left(a_{12}\right)^3 = \frac{6 \times \left(35\sqrt{3} - 30\sqrt{3} + \sqrt{15}\right)}{27}\left(a_{12}\right)^3 =$$

$$= \boxed{\frac{2\left(5\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)}{9}\left(a_{12}\right)^3}$$

Por otra parte, tenemos que (ver lám. 4, fórm. 40)

$$S_5 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(l_{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{10 \times \left(5-\sqrt{5}\right)}}{6}\left(a_{12}\right)^2$$

Lámina 28	Poliedros derivados de los regulares Derivado del dodecaedro	Hoja nº 15

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{S_5} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \left(\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3} a_{12}\right)^2 =$

$$= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \frac{15+3-2\sqrt{45}}{9} \left(a_{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \times \frac{6\,(3-\sqrt{5})}{9} \left(a_{12}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}} \times (3-\sqrt{5})}{6} \left(a_{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})\,(3-\sqrt{5})^2}}{6} \left(a_{12}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}}{6} \left(a_{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{(25+10\sqrt{5})(7-3\sqrt{5}) \times 2}}{6} \left(a_{12}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \times (175+70\sqrt{5}-75\sqrt{5}-150)}}{6} \left(a_{12}\right)^2 = \frac{\sqrt{2\,(25-5\sqrt{5})}}{6} \left(a_{12}\right)^2 =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}}{6} \left(a_{12}\right)^2}$$

por otra parte $\quad h = a_{12} - c_{12} = \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) a_{12}$

y finalmente

$$V = V_{12} + 12 \times \frac{S_5 \times h}{3} = \frac{2\,(5\sqrt{3}+\sqrt{15})}{9} \left(a_{12}\right)^3 + 4 \times \frac{\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{6} \times h \times \left(a_{12}\right)^2$$

$$= \left[\frac{2\,(5\sqrt{3}+\sqrt{15})}{9} + \frac{2\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}}{3} \times \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right] \left(a_{12}\right)^3 =$$

$$= \frac{2\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}}{3} \left(a_{12}\right)^2$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{V} = \left[\frac{2\,(5\sqrt{3}+\sqrt{15})}{9} + \frac{2\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}}{3} \times \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right] \left(a_{12}\right)^3 =$$

		19 - 7 - 72

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10\,(5-\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}{15}} \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10\,(25-5\sqrt{5}+10\sqrt{5}-10)}{15}} \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10\,(15-5\sqrt{5})}{15}} \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10\,(3-\sqrt{5})}{3}} \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} \times \sqrt{3-\sqrt{5}} \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{3} \left(\sqrt{\frac{50}{6}} + \sqrt{\frac{10}{6}} \right) \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{6}{9} \left(\sqrt{\frac{50}{6}} + \sqrt{\frac{10}{6}} \right) \right] (a_{12})^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9} \left(5\sqrt{3} + \sqrt{15} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{10\,(5-\sqrt{5})} - \frac{1}{9} \left(\sqrt{300} + \sqrt{60} \right) \right] (a_{12})^3 =$$

Lámina 28	Poliedros derivados de los regulares Derivado del dodecaedro	Hoja nº 17

$$= \left[\frac{2}{9}\left(5\sqrt{3}+\sqrt{15}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{10(5-\sqrt{5})} - \frac{1}{9}\left(10\sqrt{3}+2\sqrt{15}\right)\right]\left(a_{12}\right)^3 =$$

$$= \left[\frac{2}{9}\left(5\sqrt{3}+\sqrt{15}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{10(5-\sqrt{5})} - \frac{2}{9}\left(5\sqrt{3}+2\sqrt{15}\right)\right]\left(a_{12}\right)^3 =$$

$$= \boxed{\frac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3}\left(a_{12}\right)^3}$$

---

		19 - 7 - 72

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores:

CUADRO SINÓPTICO

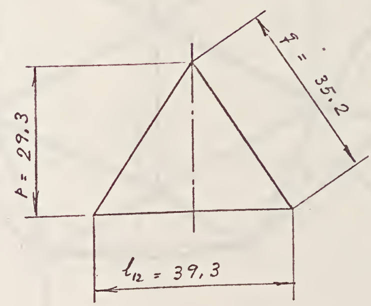
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l_{12}	$\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\ a_{12}$	$0,71\ 36\ 44\ldots\ a_{12}$
b_1	$\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\ a_{12}$	$0,93\ 41\ 72\ldots\ a_{12}$
b_2	$\sqrt{\left(1+\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2}\ a_{12}$	$0,94\ 72\ 74\ldots\ a_{12}$
c_{12}	$\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}\ a_{12}$	$0,79\ 46\ 55\ldots\ a_{12}$
c_1	$=\left(\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}\right)\times\left(3+\sqrt{\dfrac{15+3\sqrt{5}}{2}}\right):\sqrt{1+\left(3+\sqrt{\dfrac{15+3\sqrt{5}}{2}}\right)^2}\times a_{12}$ $=\sqrt{\left(1+\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2}\times\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\times\sqrt{\left[2-2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]:\left[\dfrac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]}\ a_{12}$	$0,92\ 26\ 02\ldots\ a_{12}$
d_{12}	$\sqrt{\dfrac{10-2\sqrt{5}}{15}}\ a_{12}$	$0,60\ 70\ 62\ldots\ a_{12}$
k_{12}	$\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{30}}\ a_{12}$	$0,49\ 11\ 24\ldots\ a_{12}$
$2\varphi_{12}$	$\operatorname{sen}\varphi_{12}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}\qquad \varphi_{12}=58^\circ\ 16'\ 57{,}1''$	$\operatorname{sen}\varphi_{12}=0,85\ 06\ 51$ $2\varphi_{12}=116^\circ\ 33'\ 54{,}2''$
$2\alpha_{12}$	$\operatorname{tg}\alpha_{12}=3+\sqrt{\dfrac{15+3\sqrt{5}}{2}}\qquad \alpha_{12}=80^\circ\ 58'\ 22{,}8''$	$\operatorname{tg}\alpha_{12}=6,29\ 45\ 56$ $2\alpha_{12}=161^\circ\ 56'\ 45{,}6''$
$2\gamma_{12}$	$\operatorname{sen}\gamma_{12}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\times\sqrt{\left[2-2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]:\left[\dfrac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]}$	$\operatorname{sen}\gamma_{12}=0,97\ 39\ 55$ $2\gamma_{12}=153^\circ\ 47'\ 22{,}6''$
β_{12}	$\operatorname{sen}\beta_{12}=\left(1-\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}}$	$\operatorname{sen}\beta_{12}=0,38\ 57\ 53$ $\beta_{12}=22^\circ\ 41'\ 25{,}7''$
p	$\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{12}$	$0,53\ 23\ 24\ldots\ a_{12}$
q	$\sqrt{2-2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{12}$	$0,64\ 08\ 52\ldots\ a_{12}$
t	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\ a_{12}$	$1,15\ 47\ 01\ldots\ a_{12}$
S	$30\times\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{5}}{6}-2\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\times(a_{12})^2$	$11,39\ 67\ 02\ldots(a_{12})^2$
V	$\dfrac{2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}}{3}\ (a_{12})^3$	$3.50\ 48\ 74\ldots(a_{12})^3$

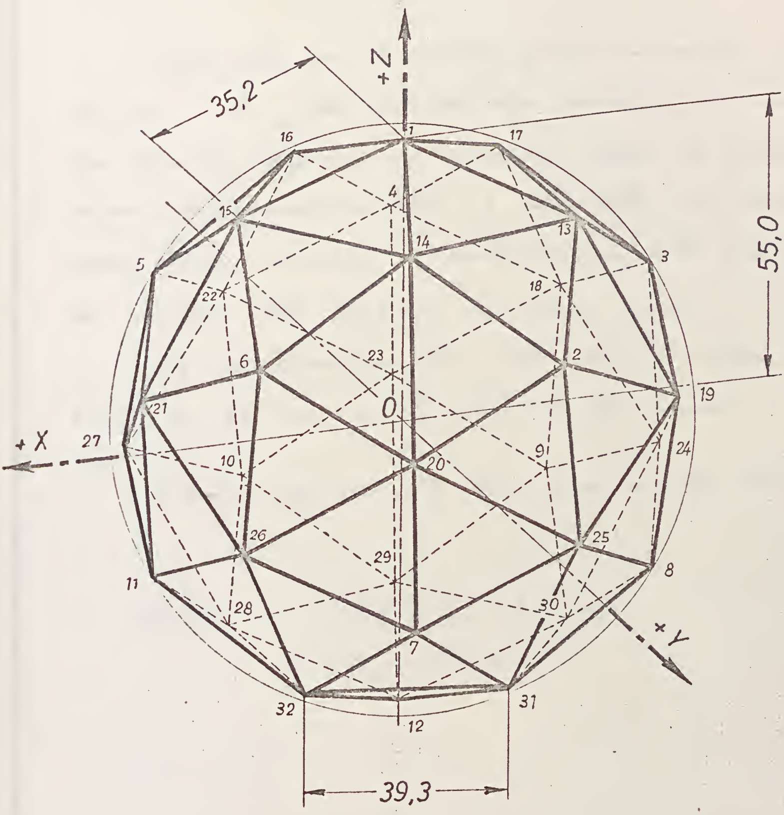
UNE A4 210 X 297

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 60 caras iguales en forma de triángulo isósceles, de base $l_{12} = 39.3$ mm y altura $p = 29,3$ mm; en este triángulo el lado "q" tiene el valor $q = 35.2$ mm (comprobación).

Para obtener este poliedro se formarán previamente 12 pirámides rectas de base pentagonal regular de lado "l_{12}", cuyas caras laterales son 5 triángulos (ver figura), acoplados por su lado "q".





Poliedro derivado del dodecaedro regular

Lámina 29	POLIEDROS DERIVADOS DE LOS REGULARES A) Por proyección de los centros de las caras	29

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un icosaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de dicha cara.

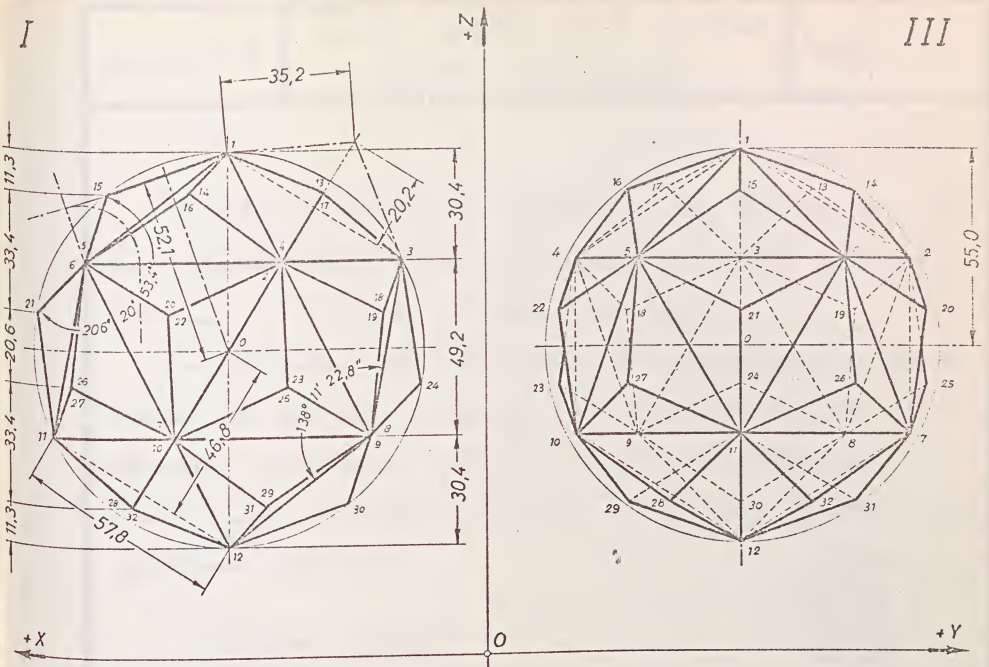
Las coordenadas del centro de la esfera, son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma, de 55 mm.

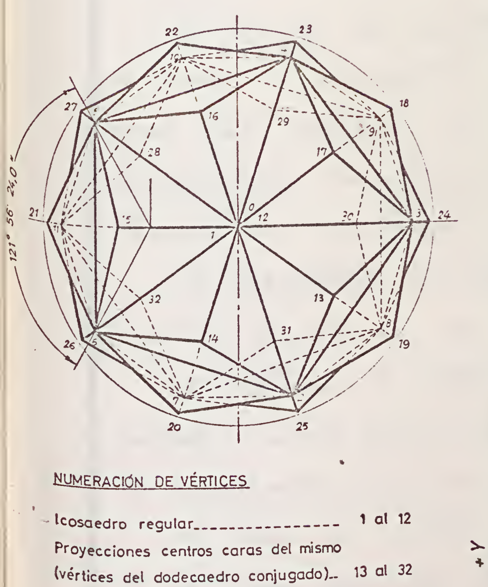
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS: O (72, 72, 85) mm

a_{20} = 55 mm.

20 - 7 - 72





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un icosaedro regular, obtenido al proyectar desde el centro de la esfera circunscrita a éste, y sobre ella, los centros de cada cara, uniendo a continuación estos puntos con los vértices del polígono de cada cara.

Las coordenadas del centro de la esfera, son: O (72, 72, 85) mm y el radio de la misma, de 55 mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

- Icosaedro regular________________ 1 al 12
- Proyecciones centros caras del mismo (vértices del dodecaedro conjugado)__ 13 al 32

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Poliedro derivado del icosaedro regular					Lámina 29 Curso 19 - 19

Al estudiar el ejercicio propuesto en la lámina 25, hemos obtenido unas deducciones previas de carácter general, comunes a los cinco poliedros regulares.

Las fórmulas allí deducidas las aplicaremos sucesivamente en este caso particular del icosaedro regular. El desarrollo del cálculo correspondiente a esta lámina, seguirá pues aquellas directrices, a las que haremos las oportunas referencias.

PROCESO GRÁFICO

En el caso del poliedro derivado del icosaedro regular, el proceso es inmediato, ya que sabemos que el conjugado del icosaedro es un dodecaedro regular, y esta representación ha sido ya realizada en el ejercicio de la lámina 24, cuyo proceso nos permite:

1º Representar el icosaedro regular dado, de vértices 1 al 12, inscrito en una esfera de 55 mm de radio.

2º Obtener los vértices 13 al 32 del dodecaedro conjugado inscrito en la misma esfera (estos vértices se han de corresponder con los 21 al 40 de la lámina 24).

3º Unir los vértices 21 al 40 con los correspondientes de cada cara del icosaedro dado.

Al terminar la representación del poliedro derivado,

podemos comprobar que éste es un poliedro cóncavo, de

$C = 3 \times 20 = 60$ caras (ver lám. 25, fórm. [1]); de

$V = 20 + 12 = 32$ vértices (ver lám. 25, fórm. [2]); y de

$A = 30 + 3 \times 20 = 90$ aristas (ver lám. 25, fórm. [3]).

La demostración de la concavidad de este poliedro la haremos analíticamente.

PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

Calculemos previamente los siguientes valores deducidos de ejercicios anteriores, en función del radio a_{20} (dato) de la esfera circunscrita.

Número de caras "n" del icosaedro dado

$$n = 20$$

Radio "a_{20}" de la esfera circunscrita al mismo (dato del ejercicio).

Lado "l_{20}" del icosaedro dado

Se deduce de la fórm. 43, lám. 5

$$l_{20} = \frac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}\, a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{20}} = \dfrac{4}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}\, a_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{16}{10+2\sqrt{5}}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{8}{5+\sqrt{5}}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{8\,(5-\sqrt{5})}{20}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{20} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_{20}}$$

<u>Radio "b_1" de la esfera tangente a las aristas del poliedro regular dado</u>

Se deduce de la fórm. 44, lám. 5

$$b_1 = b_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\, l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{b_1} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})\,(1+\sqrt{5})^2}{16 \times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})\,(6+2\sqrt{5})}{8 \times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})\,(3+\sqrt{5})}{20}}\, a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{20}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{20}}\, a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{20}}$$

<u>Radio "c_{20}" de la esfera inscrita en el mismo</u>

Se deduce de la fórm. 45, lám. 5.

$$c_{20} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\, l_{20} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{c_{20}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12} \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt{5})(3\sqrt{3}+\sqrt{15})^2}{12 \times 12 \times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(27+15+6\sqrt{45})}{6 \times 12 \times 5}}\, a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(42+18\sqrt{5})}{6 \times 12 \times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{12 \times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{35 - 7\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 15}{12 \times 5}}\, a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{20 + 8\sqrt{5}}{12 \times 5}}\, a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}}$$

Radio "d_{20}" de la circunferencia circunscrita al polígono regular de una cara del mismo.

Se deduce de la fórm. 46, lám. 5

$$d_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l_{20} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{15}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{15}}\, a_{20}$$

Radio "k_{20}" de la circunferencia inscrita al polígono regular de una cara del mismo (apotema).

Se deduce de la fórm. 53, lám. 5.

$$k_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6}\, l_{20} = \frac{\sqrt{3}}{6} \times \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{12 \times 5}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}\, a_{20}$$

Ángulo rectilíneo "$2\varphi_{20}$" del diedro del mismo.

Se deduce de la fórm. 47, lám. 5

$$\operatorname{sen} \varphi_{20} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{6} \qquad 2\varphi_{20} = 138^\circ\ 11'\ 22{,}8''$$

Tomando como base los valores anteriores, deduciremos los siguientes del poliedro derivado

<u>Angulo rectilíneo "$2\alpha_{20}$" del diedro formado por dos caras contiguas del poliedro derivado, en una arista del icosaedro dado.</u>

Se deduce de la fórmula general [4] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$\operatorname{tg}.\ \alpha_{20} = \frac{a_{20}\ k_{20}}{(k_{20})^2 - a_{20}\ c_{20} + (c_{20})^2} = \frac{a_{20} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{30}}\ a_{20}}{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{30}}\ a_{20}\right)^2 - a_{20}\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\ a_{20} + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\ a_{20}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{6(5-\sqrt5)} + 2\sqrt5}{2}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\operatorname{tg}\ \alpha_{20}} = \frac{a_{20}\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{30}} \times a_{20}}{\left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{30}}\ a_{20}\right)^2 - a_{20}\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}} \times a_{20} + \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\ a_{20}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{30}}}{\frac{5-\sqrt5}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}} + \frac{5+2\sqrt5}{15}} = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{30}}}{\frac{5-\sqrt5+10+4\sqrt5}{30} - \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30(5-\sqrt5)}}{15+3\sqrt5 - \sqrt{\frac{30^2(5+2\sqrt5)}{15}}} = \frac{\sqrt{30(5-\sqrt5)}}{3(5+\sqrt5) - \sqrt{60(5+2\sqrt5)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{30(5-\sqrt5)}}{3(5+\sqrt5) - 2\sqrt{15(5+2\sqrt5)}} = \frac{\sqrt{30(5-\sqrt5)} \times \left[3(5+\sqrt5) + 2\sqrt{15(5+2\sqrt5)}\right]}{9\times(25+5+10\sqrt5) - 4\times15\times(5+2\sqrt5)} =$$

$$= \frac{3\sqrt{30(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})^2} + 2\sqrt{30\times 15\cdot(5-\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}}{270+90\sqrt{5}-300-120\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{30(25-5)(5+\sqrt{5})} + 2\times 15\sqrt{2(25-5\sqrt{5}+10\sqrt{5}-10)}}{-30\sqrt{5}-30} =$$

$$= \frac{3\sqrt{30\times 20\times(5+\sqrt{5})} + 30\sqrt{2(15+5\sqrt{5})}}{-(30\sqrt{5}+30)} = -\frac{3\times 10\sqrt{6(5+\sqrt{5})} + 30\sqrt{10(3+\sqrt{5})}}{30(\sqrt{5}+1)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{6(5+\sqrt{5})} + \sqrt{10(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{5}+1} = -\frac{\sqrt{6(5+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2} + \sqrt{10(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}}{4} =$$

$$= -\frac{\sqrt{6(5+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})} + \sqrt{10(3+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}}{4} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{3(5+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}}{4} = -$$

$$= -\frac{\sqrt{3(15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5)} + \sqrt{5(9-5)}}{2} = -\frac{\sqrt{3(10-2\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2} =$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2}}$$

El valor numérico de α_{20} en grados sexagesimales, será:

$$\operatorname{tg}\alpha_{20} = -\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2} = -4{,}27\ 22\ 15\ 8 = \operatorname{tg}(\pi-\delta) = -\operatorname{tg}\delta$$

$$\operatorname{tg}\delta = 4{,}27\ 22\ 15\ 8$$

$lg\ tg\ \delta = lg.\ 4{,}27\ 22\ 15\ 8 = 0{,}6306\ 532$

$\delta = 76^\circ\ 49'\ 33{,}3''$ $\quad \alpha_{20} = 180^\circ - 76^\circ\ 49'\ 33{,}3'' = 103^\circ\ 10'\ 26{,}7''$

$$2\ \alpha_{20} = 206^\circ\ 20'\ 53{,}4''$$

El valor de $\alpha_{20} > 90^\circ$ nos demuestra la concavidad del poliedro derivado (ver lám. 25 "Consideraciones previas").

<u>Altura "p" de una cara lateral de la pirámide recta formada en cada cara del icosaedro dado (cara del poliedro derivado).</u>

Se deduce de la fórmula general [5] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$p = \sqrt{(a_{20} - c_{20})^2 + (k_{20})^2} = \sqrt{\left[a_{20} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\,a_{20}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{30}}\,a_{20}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\right)^2 + \frac{5-\sqrt5}{30}} \times a_{20} = \sqrt{\frac{15+\sqrt5}{10} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}}\ a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{p} = \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}\right)^2 + \frac{5-\sqrt5}{30}}\ a_{20} =$

$$= \sqrt{1 + \frac{5+2\sqrt5}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}} + \frac{5-\sqrt5}{30}}\ a_{20} = \sqrt{\frac{30+10+4\sqrt5+5-\sqrt5}{30} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}}\ a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{45+3\sqrt5}{30} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}}\ a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{15+\sqrt5}{10} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt5}{15}}}\ a_{20}}$$

Lámina 29	Poliedros derivados de los regulares Derivado del icosaedro	Hoja nº 8

Arista lateral "q" de la pirámide recta regular, o lado igual del triángulo isósceles de una cara del poliedro derivado.

Se deduce de la fórmula general [6] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$q = \sqrt{(a_{20} - C_{20})^2 + (d_{20})^2} = \sqrt{\left[a_{20} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\,a_{20}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\,a_{20}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\;a_{20} = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\;a_{20}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{q} = \sqrt{\left[a_{20} - \left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\,a_{20}\right)\right]^2 + \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\,a_{20}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)^2 (a_{20})^2 + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}(a_{20})^2} = \sqrt{1 + \frac{5+2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} + \frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\;a_{20} =$$

$$= \sqrt{\frac{15+5+2\sqrt{5}+10-2\sqrt{5}}{15} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\;a_{20} = \boxed{\sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\;a_{20}}$$

Segmento "t" que se obtiene al unir los extremos de dos lados consecutivos del polígono de una cara del icosaedro dado.

Es el tercer lado del triángulo equilátero de una cara, o sea

$$t = l_{20} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\;a_{20}$$

		21 - 7 - 72

Angulo rectilíneo del diedro "$2\gamma_{20}$" formado por dos caras laterales contiguas en las aristas de la pirámide recta.

Se deduce de la fórmula general [7] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso

$$\operatorname{sen}\gamma_{20} = \frac{t\,q}{2\,l_{20}\;p} = \frac{l_{20}\,q}{2\,l_{20}\;p} = \frac{1}{2}\times\frac{q}{p} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\;a_{20}}{\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\;a_{20}}$$

$$= \frac{0,64\;08\;51\;8\ldots}{2\times0,36\;64\;66\;7\ldots} = \frac{0,64\;08\;51\;8\ldots}{0,73\;29\;33\;4\ldots} = 0,87\;43\;65\;7\ldots$$

$$\operatorname{sen}\gamma_{20} = \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]:\left[4\times\left(\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]}$$

$$\lg\operatorname{sen}\gamma_{20} = \lg 0,87\;43\;657 = \bar{1},9416\;931$$

$$\gamma_{20} = 60^\circ\;58'\;12,0'' \qquad 2\gamma_{20} = 121^\circ\;56'\;24,0''$$

Angulo diedro "β_{20}" formado por una cara lateral de la pirámide y su base.

Se deduce de la fórmula general [8] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso

$$\operatorname{sen}\beta_{20} = \frac{a_{20}-c_{20}}{p} = \frac{a_{20}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\,a_{20}}{\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\cdot a_{20}} = \frac{1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}{\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}}$$

El valor numérico de β_{20}, se obtiene a continuación:

$$\operatorname{sen} \beta_{20} = \frac{1 - 0{,}79\ 46\ 54\ 5\ldots}{0{,}36\ 64\ 66\ 7\ldots} = \frac{0{,}20\ 53\ 45\ 5\ldots}{0{,}36\ 64\ 66\ 7\ldots} = 0{,}56\ 03\ 38\ 8\ldots$$

$$\lg \operatorname{sen} \beta_{20} = \lg\ 0{,}56\ 03\ 38\ 8 \qquad \beta_{20} = 34^\circ\ 4'\ 45{,}3''$$

debiendo verificarse como comprobación (ver fórm. [11], lám. 25)

$$\begin{aligned} \alpha_{20} = \varphi_{20} + \beta_{20} = &\ 69^\circ\ 5'\ 41{,}4'' \\ + &\ 34^\circ\ 4'\ 45{,}3'' \\ \hline \alpha_{20} = &\ 103^\circ\ 10'\ 26{,}7'' \end{aligned}$$

valor coincidente con el ya obtenido en este estudio.

<u>Radio "b_2" de la esfera tangente a las aristas laterales de las pirámides rectas cuyas bases son caras del icosaedro regular dado.</u>

Se deduce de la fórmula general [9] (ver lám. 25), sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$$b_2 = \sqrt{(a_{20})^2 - \frac{q^2}{4}} = \sqrt{1 - \left(2 - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : 4}\ a_{20} = \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) : 2} \cdot a_{20}$$

<u>Radio "c_1" de la esfera inscrita en el poliedro derivado</u>

Se deduce de la fórmula general [10] (ver lám. 25)

[illegible]

sustituyendo en ella los valores particulares de este caso.

$c_1 = b_1 \operatorname{sen} \alpha_{20}$; en la que $b_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\, a_{20}$ y

$$\operatorname{tg} \alpha_{20} = -\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2}$$

de esta última se obtiene

$$\operatorname{sen} \alpha_{20} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_{20}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_{20}}} = \frac{-\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})}+2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{1+\left(-\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})}+2\sqrt{5}}{2}\right)^2}} = -m$$

Pero estando α_{20} comprendido entre π y $\frac{\pi}{2}$, el $\operatorname{sen}\alpha_{20}$ será positivo, por lo que $\operatorname{sen}\alpha_{20} = m$, y finalmente

$$\boxed{c_1 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})} + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{6(5-\sqrt{5})}+2\sqrt{5}}{2}\right)^2}} \times a_{20}}$$

Su valor numérico será:

$$\lg \frac{c_1}{a_{20}} = \lg\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \lg \operatorname{sen} 103^\circ\ 10'\ 26{,}7'' = \lg.\ 0.85\ 06\ 50\ 8 +$$

$$+ \lg \operatorname{sen}(180^\circ - 103^\circ\ 10'\ 26{,}7'') = \begin{array}{r} \bar{1},92\ 97\ 513 \\ \bar{1},98\ 84\ 172 \\ \hline \bar{1},9181\ 685 \end{array}$$

$$c_1 = 0{,}82\ 82\ 63\ 5\ldots a_{20}$$

Este mismo valor se puede deducir, como comprobación, de la fórmula equivalente [10'] (ver lám. 25), en la que

$$c_1 = b_2 \text{ sen } \gamma_{20} = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2} \times \text{sen } \gamma_{20} \times a_{20}$$

cuyo valor numérico es

$$c_1 = 0{,}94\ 72\ 73\ 6\ldots \times \text{sen } 60°\ 58'\ 12{,}0'' \times a_{20} = 0{,}94\ 72\ 73\ 6\ldots \times$$

$$\times\ 0{,}87\ 43\ 65\ 7\ldots \times a_{20} = 0{,}82\ 82\ 63\ 5\ldots\ a_{20}$$

valor coincidente con el ya obtenido anteriormente, y por lo tanto:

$$\boxed{c_1 = \sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]:\left[4\times\left(\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]} \times a_{20}}$$

Area lateral "S" del poliedro derivado

Se obtiene como suma de las áreas laterales de las veinte pirámides rectas de base triangular regular de lado "l_{20}", cuyas caras laterales son triángulos isósceles de base "l_{20}" y altura "p", valores ya determinados.

$$S = 20 \times 3 \times \frac{l_{20} \times p}{2} = 30 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10} - 2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}} \times (a_{20})^2$$

$$= 30 \times 1{,}05\ 14\ 62\ 2\ldots \times 0{,}36\ 64\ 66\ 7\ldots (a_{20})^2 = 11{,}55\ 97\ 76\ 5\ldots (a_{20})^2$$

Volumen "V" del poliedro derivado

Se obtiene como suma del volumen del icosaedro dado y de las veinte pirámides formadas en sus caras.

$$V = V_{20} + 20 \times \frac{S_3 \times h}{3}$$

siendo "S_3" el área de una cara del icosaedro, y "h" la altura de la pirámide.

Para obtener V_{20} en función de a_{20}, ver lám. 5, fórmulas 55 y 43 que nos dan

$$V_{20} = \frac{15+5\sqrt5}{12}\left(l_{20}\right)^3 = \frac{15+5\sqrt5}{12} \times \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{5}}\; a_{20}\right)^3 = \frac{\sqrt{8\,(5+\sqrt5)}}{3}\left(a_{20}\right)^3$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{V_{20}} = \frac{15+5\sqrt5}{12} \times \left(\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{5}}\right)^3 \left(a_{20}\right)^3 =$

$$= \frac{15+5\sqrt5}{12} \times \frac{10-2\sqrt5}{5} \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt5)}{5}}\left(a_{20}\right)^3 = \frac{(15+5\sqrt5)(10-2\sqrt5)}{5 \times 12} \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt5)}{5}}\left(a_{20}\right)^3$$

$$= \frac{(3+\sqrt5)(5-\sqrt5)}{6} \times \sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt5)}{5}} \times \left(a_{20}\right)^3 = \frac{15+5\sqrt5-3\sqrt5-5}{6}\sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt5)}{5}}\left(a_{20}\right)^3 =$$

$$= \frac{10+2\sqrt5}{6}\sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt5)}{5}}\left(a_{20}\right)^3 = \frac{5+\sqrt5}{3}\sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt5)}{5}} \cdot \left(a_{20}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\,(5-\sqrt5)(5+\sqrt5)^2}{5}}\left(a_{20}\right)^2 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2 \times 20 \times (5+\sqrt5)}{5}}\left(a_{20}\right)^3 =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{8\,(5+\sqrt5)}}{3}\left(a_{20}\right)^2}$$

Lámina 29	Poliedros derivados de los regulares Derivado del icosaedro	Hoja nº 14

Igualmente "h" en función de "a_{20}", valdrá

$$h = (a_{20} - c_{20}) = \left(1 - \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)$$

y "S_3", también en función de "a_{20}", valdrá (ver fórmus 43 y 54, lám. 5)

$$S_3 = \frac{5\sqrt{3}}{20}(l_{20})^2 = \frac{5\sqrt{3}}{20} \times \left(\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\, a_{20}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{10+2\sqrt{5}}\,(a_{20})^2 =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{5+\sqrt{5}}(a_{20})^2 = \frac{2(5-\sqrt{5})\sqrt{3}}{20}(a_{20})^2 = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{10}\,(a_{20})^2$$

Sustituyendo los valores de V_{20}, h y S_3 en la fórmula inicial, tendremos:

$$\boxed{V} = V_{20} + \frac{20}{3} \times S_3 \times h = \left[\frac{\sqrt{8(5+\sqrt{5})}}{3} + \frac{20}{3} \times \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{10} \times \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right](a_{20})^3$$

$$= \boxed{\frac{10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{3}\,(a_{20})^3}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{V} = \left[\frac{\sqrt{8(5+\sqrt{5})}}{3} + \frac{20}{3} \times \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{10} \times \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right](a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + 2(5\sqrt{3}-\sqrt{15}) \times \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right](a_{20})^3 =$$

[signature]		20 - 9 - 72

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + \left(10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right) - 2\left(5\sqrt{3} - \sqrt{15}\right) \times \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right] (a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + \left(10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right) - 2\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(5\sqrt{3}-\sqrt{15})^2}{15}}\right] (a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + \left(10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right) - 2\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(75+15-10\sqrt{45})}{15}}\right] (a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + \left(10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right) - 2\sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(90-30\sqrt{5})}{15}}\right] (a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + \left(10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right) - 2\sqrt{(5+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}\right] (a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + \left(10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right) - \sqrt{8(5+2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}\right] (a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + \left(10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right) - \sqrt{8(15+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}-10)}\right] (a_{20})^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{8(5+\sqrt{5})} + \left(10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}\right) - \sqrt{8(5+\sqrt{5})}\right] (a_{20})^3 =$$

$$= \boxed{\frac{10\sqrt{3} - 2\sqrt{15}}{3} (a_{20})^3}$$

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores:

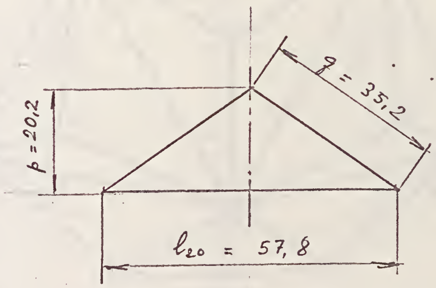
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l_{20}	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\ a_{20}$	$1.05\ 14\ 62\ldots a_{20}$
b_1	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ a_{20}$	$0,85\ 06\ 51\ldots a_{20}$
b_2	$\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2}\ a_{20}$	$0,94\ 72\ 74\ldots a_{20}$
c_{20}	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\ a_{20}$	$0.79\ 46\ 55\ldots a_{20}$
c_1	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} \times \left[\sqrt{6(5-\sqrt{5})}+2\sqrt{5}\right] : 2\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{5})+2\sqrt{5}}{2}\right)^2}\ a_{20}$ $\sqrt{\left(1+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):2} \times \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]:\left[4\times\left(\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]}\ a_{20}$	$0,82\ 82\ 64\ldots a_{20}$
d_{20}	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\ a_{20}$	$0,60\ 70\ 62\ldots a_{20}$
k_{20}	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{30}}\ a_{20}$	$0,30\ 35\ 31\ldots a_{20}$
$2\varphi_{20}$	$\operatorname{sen}\varphi_{20} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$ $\quad \varphi_{20} = 69^\circ\ 5'\ 41,4''$	$\operatorname{sen}\varphi_{20} = 0.93\ 41\ 72\ldots$ $2\varphi_{20} = 138^\circ\ 11'\ 22,8''$
$2\alpha_{20}$	$\operatorname{tg}\alpha_{20} = -\frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{5})+2\sqrt{5}}{2}$ $\quad \alpha_{20} = 103^\circ\ 10'\ 26,7''$	$\operatorname{tg}\alpha_{20} = -4,27\ 22\ 16\ldots$ $2\alpha_{20} = 206^\circ\ 20'\ 53,4''$
$2\gamma_{20}$	$\operatorname{sen}\gamma_{20} = \sqrt{\left[2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right]:\left[4\times\left(\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right)\right]}$	$\operatorname{sen}\gamma_{20} = 0,87\ 43\ 66\ldots$ $2\gamma_{20} = 121^\circ\ 56'\ 24,0''$
β_{20}	$\operatorname{sen}\beta_{20} = \left(1-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right):\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}$	$\operatorname{sen}\beta_{20} = 0,56\ 03\ 39\ldots$ $\beta_{20} = 69^\circ\ 5'\ 41,4''$
p	$\sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{20}$	$0,36\ 64\ 68\ldots a_{20}$
q	$\sqrt{2-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ a_{20}$	$0,64\ 08\ 52\ldots a_{20}$
t	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\ a_{20}$	$1,05\ 14\ 62\ldots a_{20}$
S	$30\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} \times \sqrt{\frac{15+\sqrt{5}}{10}-2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}}\ (a_{20})^2$	$11,55\ 97\ 77\ldots (a_{20})^2$
V	$\frac{10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}{3}\ (a_{20})^3$	$3,19\ 15\ 14\ldots (a_{20})^3$

Lámina 29	Poliedros derivados de los regulares Derivado del icosaedro	Hoja nº 17

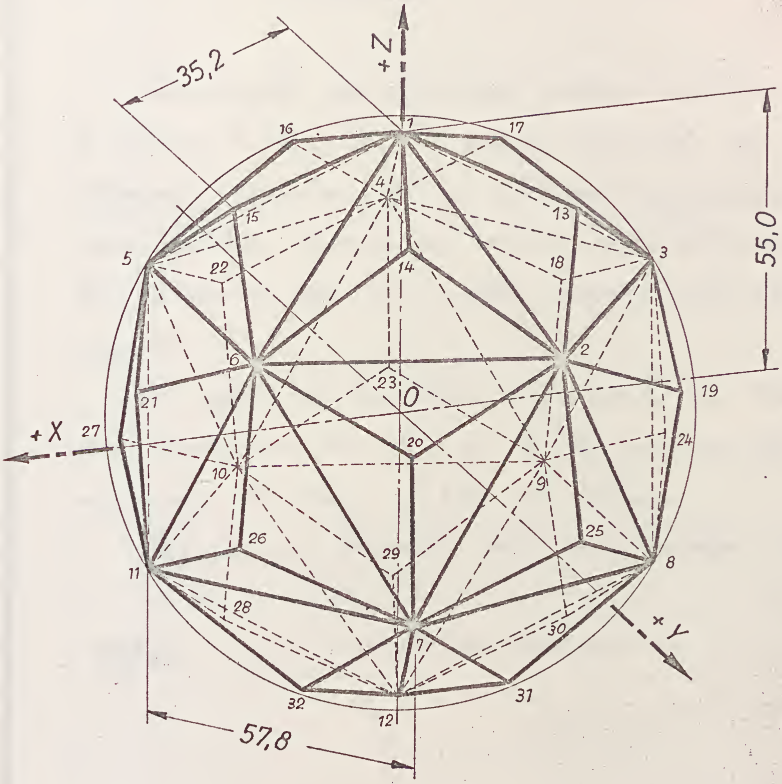
FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 60 caras iguales en forma de triángulo isósceles, de base $l_{20} = 57.8$ mm y altura $p = 20.2$ mm; en este triángulo, el lado "q" tiene el valor $q = 35.2$ mm (comprobación).

Para obtener este poliedro se formarán previamente 20 pirámides rectas de base triangular regular de lado $l_{20} = 57,8$ mm, cuyas caras laterales son 3 triángulos (ver figura), acoplados por su lado "q"



[signature]		20 - 9 - 72



Poliedro derivado del icosaedro regular

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un tetraedro regular y de su tetraedro conjugado por sus aristas, cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

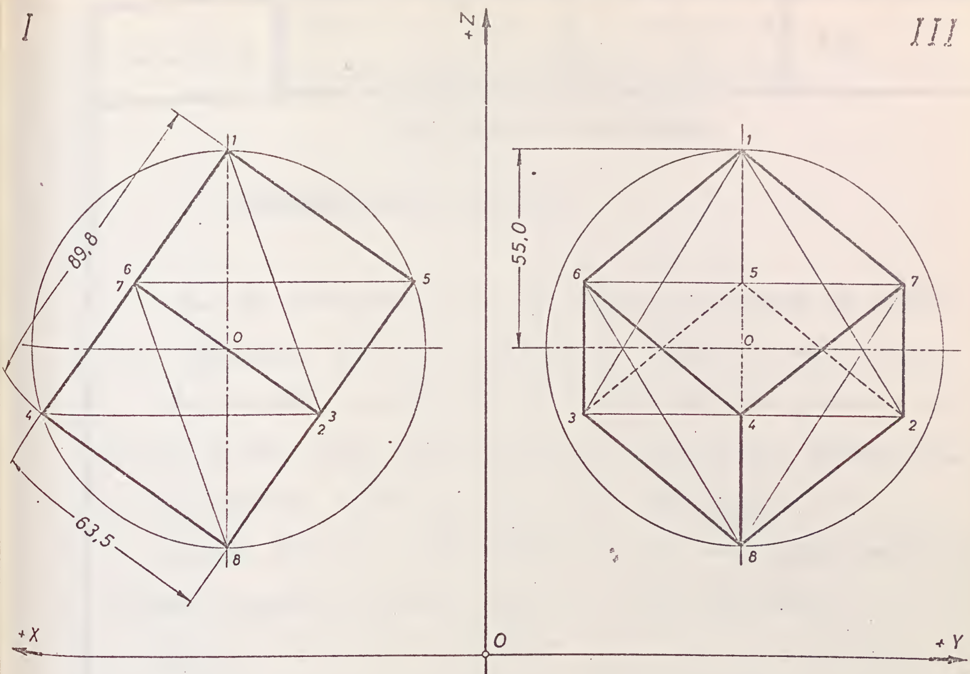
El radio de la esfera circunscrita al tetraedro dado, es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

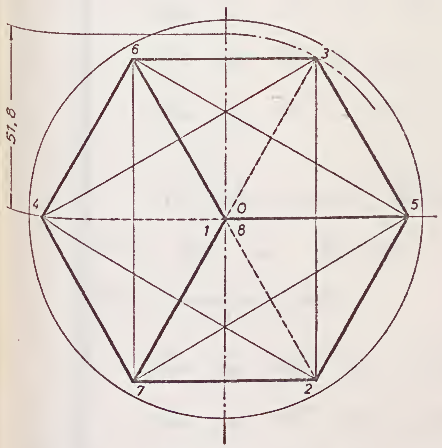
Dibujar en formato A3V y a escala 1:1

DATOS

O (72, 72, 85) mm

a_4 = 55 mm.





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un tetraedro regular y de su tetraedro conjugado por sus aristas cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambas.

El radio de la esfera circunscrita al tetraedro dado, es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Tetraedro dado (rojo)-------- 1 al 4

Tetraedro conjugado (azul)--- 5 al 8

Poliedro derivado (negro)----- 1 al 8

+Y

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Califi-cación	(firma)	Escuela Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Derivado de los conjugados tetraedro - tetraedro					Lámina 30 Curso 19 - 19

Lámina 30	Poliedros derivados de los regulares De los conjugados tetraedro - tetraedro	Hoja nº 1

TETRAEDRO - TETRAEDRO

CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 11 a 18 hemos estudiado los poliedros regulares convexos conjugados obtenidos al trazar por los puntos medios de las aristas de un poliedro regular dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro de aquél.

En la lámina 11ª obtuvimos el conjugado del tetraedro regular convexo, que es otro tetraedro.

En la 13ª el del exaedro, que es un octaedro.

En la 14ª el del octaedro, que es un exaedro.

En la 16ª el del dodecaedro, que es un icosaedro, y

En la 17ª el del icosaedro, que es un dodecaedro.

Por otra parte, hemos representado los sólidos comunes que se forman por la intersección de dos poliedros conjugados.

En la 12ª de tetraedro y tetraedro

En la 15ª de exaedro y octaedro, y

En la 18ª de dodecaedro e icosaedro

En la representación de estas tres últimas láminas, podemos observar que cada dos aristas correspondientes de ambos poliedros conjugados, son coplana-

rias y se cortan perpendicularmente en sus puntos medios; por consiguiente al unir sucesivamente los extremos de dichas aristas obtenemos un cuadrilátero plano, cuyas diagonales son las mencionadas aristas (una de cada poliedro) y que tendrá sus lados iguales, por lo que será o un rombo si las dos aristas son desiguales, o un cuadrado si son iguales.

En ambos casos, y repitiendo esta operación en todas las aristas correspondientes, obtendremos un poliedro de caras cuadradas o rómbicas, todas iguales.

Estos son los que vamos a estudiar seguidamente.

El número de poliedros diferentes, generados de esta forma, será de tres solamente y se obtendrán de los conjugados

a) Tetraedro - tetraedro

b) Exaedro - octaedro

c) Dodecaedro - icosaedro.

Pasemos a estudiar, como ejercicio de esta lámina, el primer caso a).

PROCESO GRÁFICO

El trazado gráfico del poliedro buscado, consiste en determinar previamente los vértices del tetraedro dado, y seguidamente los de su conjugado.

A continuación bastará unir consecutivamente, formando un cuadrilátero, los extremos de cada dos aristas perpendiculares (una de cada poliedro); estudiando en cada proyección la visibilidad de cada arista del poliedro pedido, se obtendrá la representación buscada.

Para el trazado de los vértices del tetraedro dado y de los de su conjugado, se seguirá el proceso análogo estudiado en el ejercicio de la lámina 11, por lo que omitimos su repetición.

El poliedro buscado tiene las propiedades siguientes:

1º Por ser las aristas del tetraedro dado y las de su conjugado, de igual magnitud (ambos inscritos en la misma esfera), la figura geométrica de sus caras serán cuadrados (por ser sus diagonales iguales y perpendiculares), y todas iguales.

2º. Como cada cara del poliedro buscado contiene a una arista del poliedro dado. (y también

otra de su conjugado), el número de caras del mismo será igual al número de aristas del tetraedro; por consiguiente tendrá <u>6 caras</u>

<u>3º</u> El número de sus vértices será pues la suma de los del tetraedro dado y dos de su conjugado, teniendo por consiguiente 4 + 4 = <u>8 vértices</u>

<u>4º</u> Como cada cara tiene 4 lados iguales, el número de aristas del poliedro buscado será $\frac{1}{2}(4 \times 6) =$ $=$ <u>12 aristas</u>, siendo 6 el número de caras; todas las aristas serán iguales.

5º El poliedro pedido será convexo, ya que queda en un mismo semiplano al prolongar el plano de cualquier cara de aquél.

Las propiedades anteriores definen al poliedro pedido por las condiciones

$$\left.\begin{array}{l} C = 6 \\ V = 8 \\ A = 12 \\ \text{Caras cuadradas} \end{array}\right\}$$

Que son las que cumplen únicamente el <u>Exaedro regular</u>.

Por consiguiente, el poliedro buscado es un <u>cubo</u> inscrito en la misma esfera dada.

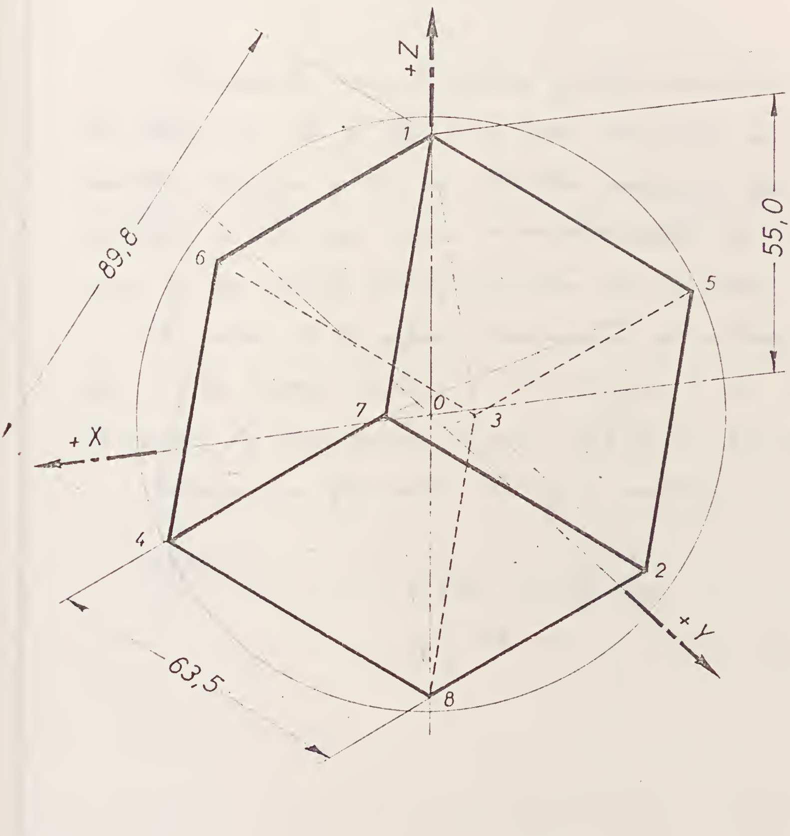
PROCESO GRÁFICO - ANALÍTICO

El cálculo analítico de las magnitudes acotadas, es igual al desarrollado en la lámina 25, cuyo proceso y cuadro sinóptico correspondiente es idéntico y por lo cual omitimos su repetición.

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de seis cuadrados de 63.5 mm. de lado (ver lám. 2).

UNE A4 210 X 297



Derivado de los conjugados tetraedro-tetraedro

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un exaedro regular y de su octaedro conjugado por sus aristas, cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

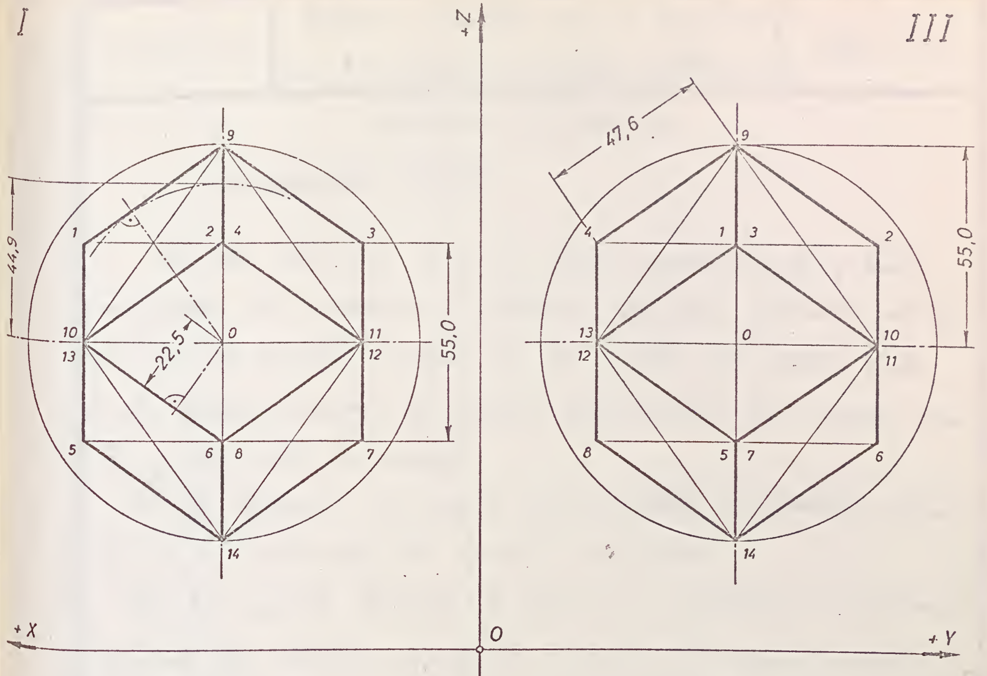
El radio de la esfera circunscrita al octaedro dado (de mayor radio), es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O son: O (72, 72, 85) mm.

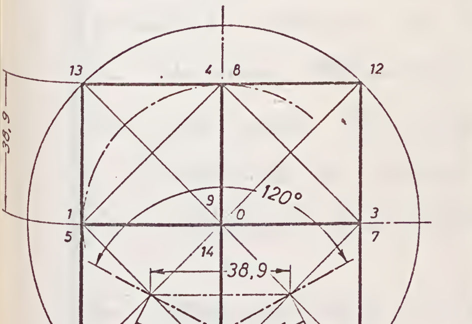
Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 72, 85) mm

$a_8 = 55$ mm





ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un exaedro regular y de su octaedro conjugado por sus aristas, cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circunscrita al octaedro dado es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O, son:
O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1:1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Exaedro conjugado (rojo)---	1 al 8
Octaedro dado (azul)------	9 al 14
Poliedro derivado---------	1 al 14

+Y

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Derivado de los conjugados exaedro-octaedro					Lámina 31
						Curso 19 -19

EXAEDRO - OCTAEDRO

CONSIDERACIONES PREVIAS

En las láminas 13 y 14 hemos estudiado los poliedros conjugados del exaedro y octaedro regulares, obtenidos al trazar por los puntos medios de las aristas del poliedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro de aquél.

En la lámina 15 hemos representado el poliedro obtenido por la intersección de ambos conjugados.

En la presente lámina 31 vamos a estudiar el poliedro derivado de ambos conjugados cuando se unen sucesivamente los extremos de cada dos aristas correspondientes con lo cual obtendremos rombos todos iguales, que serán las caras del poliedro pedido.

Previamente al estudio de su trazado, vamos a deducir las propiedades geométricas del poliedro derivado.

1º Todas sus caras son iguales y tienen la forma de rombos.

En efecto, en los trazados gráficos de las láminas 13 a 15 puede observarse que las aristas del octaedro son mayores que las del exaedro. Esto puede comprobarse analíticamente mediante la fórmula 11, lám. 2 y fórmula 21, lám. 3, siguientes:

$a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_6$ y $a_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_8$, en las que

despejando l_6 y l_8, tendremos

$$l_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} a_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3} a_6 \qquad y \qquad l_8 = \frac{2}{\sqrt{2}} a_8 = \sqrt{2}\, a_8$$

en las que haciendo $a_6 = a_8$, y siendo

$$\sqrt{2} > \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

se verificará que a igualdad de radios de sus esferas circunscritas, será

$$l_8 > l_6$$

y con mayor motivo, cuando como en el caso que nos ocupa, es

$$a_8 > a_6$$

Así pues al ser $l_8 > l_6$, el cuadrilátero obtenido al unir sucesivamente los extremos de dos aristas correspondientes en los dos poliedros conjugados, son rombos, todos iguales y caras del poliedro derivado

<u>2º El número de caras del poliedro derivado, será de 12</u>

En efecto, en virtud de su generación, cada cara contiene una arista del exaedro y también otra del octaedro; en ambos poliedros es de 12 el número de sus aristas.

<u>3ª El número de vértices del poliedro derivado es de 14</u>

Este número será el de la suma de los vértices del exaedro (8) y del octaedro (6), generadores del poliedro.

<u>4ª El poliedro derivado es convexo</u>

Pues al prolongar el plano de cualquiera de sus caras, queda todo él en el mismo semiespacio.

<u>5ª El número de aristas será de 24</u>

Por ser convexo, se verificará la relación de Euler en la que

$$C + V = A + 2$$

de la que se deduce A, ya que conocemos $C = 12$ y $V = 14$. Todas las aristas son iguales.

<u>6ª Los ángulos sólidos formados en los vértices del exaedro son triedros, y los formados en los vértices del octaedro, son tetraedros.</u>

ya que en dichos vértices concurren respectivamente tres o cuatro aristas de los poliedros conjugados. Así pues existirán en el poliedro derivado 8 ángulos sólidos triedros y 6 tetraedros.

<u>7ª Existe una esfera que pasa por los vértices tetraedros</u>

La circunscrita al octaedro dado.

<u>8º Existe una esfera, concéntrica con la anterior y distinta de ésta, que pasa por los vértices triedros.</u>

La circunscrita al exaedro conjugado y de menor radio que la anterior.

<u>9º Existe una esfera, concéntrica con las anteriores, tangente a las aristas, no en su punto medio.</u>

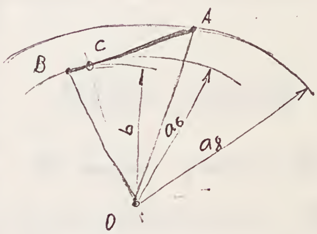


Figura 1

Si consideramos una arista cualquiera $\widehat{A\text{-}B}$, (fig. 1), cuyo extremo $\bar{A}$ pertenezca a un vértice del octaedro y el B a otro del exaedro, y unimos estos extremos con el centro O de ambos poliedros conjugados, el plano OAB será diametral, y el triángulo OAB tiene $OA > OB$ por ser $\overline{OA}$ el radio $\widehat{a_8}$ de la esfera circunscrita al octaedro y $\overline{OB}$ el radio $\widehat{a_6}$ de la del exaedro y ya hemos visto en la propiedad 1º que $a_8 > a_6$. Así pues, la altura $\overline{OC}$ de este triángulo (constante para todas las aristas), será el radio "$\widehat{b}$" de la esfera tangente a dichas aristas y el pie C de dicha altura no equidistará de A y B.

<u>10º Existe una esfera, concéntrica con las anteriores,</u>

tangente a todas las caras del poliedro derivado, en el centro del rombo (esfera inscrita).

Por ser el centro del rombo el punto de intersección y medio) de dos aristas de los poliedros regulares conjugados (una de cada uno de ellos), dicho punto coincide con el de tangencia de la esfera común tangente a ambos poliedros, y por lo tanto, el radio que pasa por él será perpendicular a ambas aristas; por consiguiente será tangente a la cara formada por ellas.

PROCESO GRÁFICO

El trazado gráfico del poliedro pedido, consiste en determinar previamente los vértices del octaedro dado, y seguidamente los del exaedro conjugado.

A continuación bastará unir consecutivamente, formando un cuadrilátero (paralelógramo en las proyecciones), los extremos de cada dos aristas perpendiculares correspondientes (una de cada poliedro); estudiando en cada proyección la visibilidad de las aristas del poliedro buscado, se obtendrá fácilmente la representación de éste.

Para el trazado del octaedro dado, y del exaedro conjugado, se seguirá el mismo proceso que el estudiado en el ejercicio de la lámina 15, por lo que omitimos su repetición.

Lámina 31	Poliedros derivados de los regulares De los conjugados exaedro-octaedro	Hoja nº 6

PROCESO GRAFICO-ANALÍTICO

Para simplificar y dar más exactitud al trazado, es muy útil el empleo de cotas calculadas previamente en forma analítica.

En este ejercicio consideraremos las siguientes magnitudes del poliedro derivado:

l = Arista del poliedro

a_1 = Radio de la esfera que pasa por los vértices tetraédricos (los del octaedro dado).

a_2 = Radio de la esfera que pasa por los vértices triedros (los del exaedro conjugado)

b = Radio de la esfera tangente a las aristas

c = Radio de la esfera tangente a las caras

l_8 = Arista del octaedro dado

l_6 = Arista del cubo conjugado.

l_{II} = Distancia entre los centros de dos caras contiguas.

p = Distancia del centro de una cara a uno de sus lados

2φ = Angulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

S = Superficie lateral

V = Volumen

Todas las magnitudes anteriores las calcularemos en función de a_1, radio de la esfera circunscrita al octaedro regular dado.

a_1 = Radio de las esfera que pasa por los vértices tetraédricos.

Dato del ejercicio

l_8 = Arista del octaedro dado

De la fórmula 137, lám. 13, se obtiene que

$$a_1 = a'_8 = l_6 \qquad \text{y de la fórm. 136, que}$$

$$l'_8 = \boxed{l_8} = \sqrt{2}\; l_6 = \boxed{\sqrt{2}\; a_1}$$

l_6 = Arista del cubo conjugado

Por el cálculo anterior vemos también que

$$\boxed{l_6} = \boxed{a_1}$$

l = Arista del poliedro

l_8 y l_6 son las diagonales del rombo que forma una cara, por lo que

$$\boxed{l} = \sqrt{\left(\frac{l_8}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_6}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\, a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\, a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{2}{4}(a_1)^2 + \frac{1}{4}(a_1)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\ (a_1) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\ a_1}$$

p = Distancia del centro de una cara a uno de sus lados

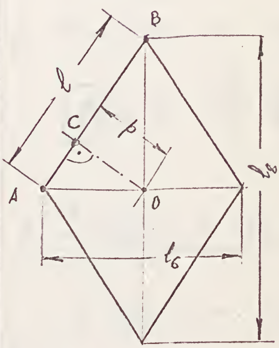


Figura 2

En la figura 2 hemos representado una cara del poliedro pedido (rombo de diagonales l_6 y l_8).

Tracemos por O la perpendicular al lado AB, siendo C el pie de la misma.

Los triángulos rectángulos A·O·B y A·C·O son semejantes (ángulo $\widehat{C \cdot A \cdot O}$ común), por lo que

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \quad \text{de donde} \quad \overline{OC} = \frac{\overline{AO} \times \overline{BO}}{\overline{AB}}$$

y sustituyendo valores $\overline{OC} = p$, $\overline{AO} = \frac{l_6}{2}$, $\overline{BO} = \frac{l_8}{2}$, $\overline{AB} = l$, tendremos

$$p = \frac{\frac{l_6}{2} \times \frac{l_8}{2}}{l} = \frac{l_6 \times l_8}{4\,l};$$

los valores de l_6, l_8, l, han sido calculados anteriormente por lo que sustituyendo

$$\boxed{p} = \frac{a_1 \times \sqrt{2} \times a_1}{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a_1} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\ a_1 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{6}\ a_1}$$

a_2 = Radio de la esfera que pasa por los vértices triedros

Es el radio de la esfera circunscrita al cubo de lado l_6 dado, siendo el valor de éste, en función de a_1

$$l_6 = a_1$$

y teniendo en cuenta la fórm. 11, lám. 2, será

$$\boxed{a_2} = a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_6 = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} a_1}$$

b * = Radio de la esfera tangente a las aristas

Si unimos los extremos C y B (Fig. 3) de una arista del poliedro derivado, con el centro A de la esfera circunscrita, se nos formará un triángulo $\overline{A \cdot C \cdot B}$, de

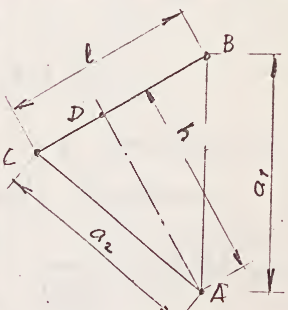


Figura 3

lados $\overline{CB} = l$; $\overline{AC} = a_2$ y $\overline{AB} = a_1$. La altura $\overline{AD}$ correspondiente al lado $\overline{CB}$, será el radio pedido.

En Geometría se demuestra que el área F del triángulo ABC, tiene el valor

$$F = \frac{1}{2} ah = \sqrt{s(s-a)(s-b')(s-c)}\text{, siendo } \underline{s} \text{ el}$$

semiperímetro, a, b', c los lados del triángulo. y h la altura correspondiente al lado a. De aquí se

deduce que

$$h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b')(s-c)}}{a}$$

En el caso particular que nos ocupa, tendremos que

$$\left.\begin{aligned} a &= l = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 \\ b' &= a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a_1 \\ c &= a_1 \end{aligned}\right\} \quad s = \frac{a+b'+c}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + a_1}{2} = \\ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,a_1$$

$$s-a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_1$$

$$s-b = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_1$$

$$s-c = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a_1 - a_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1\right)a_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a_1$$

$$h = b$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula general, tendremos

$$\boxed{b} = \frac{2\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2}a_1 \times \frac{1}{2}a_1 \times \frac{1}{2}a_1 \times \frac{\sqrt{3}-1}{2}a_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a_1} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}\,a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{b} = \frac{2\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2}a_1 \times \frac{1}{2}a_1 \times \frac{1}{2}a_1 \times \frac{\sqrt{3}-1}{2}a_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a_1} = \frac{2\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{4} \times \frac{1}{4}(a_1)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a_1} =$$

NOTA.- El proceso de cálculo seguido en este estudio para la determinación del valor del radio $\underline{b}$ de la esfera tangente a las aristas, conduce con relativa facilidad a la obtención del resultado buscado.

Al tratar de aplicar este mismo proceso en el ejercicio análogo de la lámina 32 para los conjugados dodecaedro-icosaedro, tropezamos con la dificultad material de simplificar un complicado radical que tenía la siguiente expresión:

$$b = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1\right)\frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}} + 1\right)\frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + 1\right)\frac{a_1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\right)\frac{a_1}{2}}}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1}$$

Después de varios intentos infructuosos, enfocamos de nuevo el problema bajo un punto de vista trigonométrico, que nos llevó rápidamente a su solución, obteniendo el valor de

$$b = \frac{2\sqrt{5}}{5}\, a_1$$

Este valor será pues el resultado de la simplificación del complicado radical primitivo.

Si aplicamos el proceso seguido en la lámina 32, a este caso obtendremos el mismo resultado por un camino más corto que detallamos a continuación:

(sigue al dorso de la página 10)

$$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a_1 \qquad\qquad l = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a_1$$

$$\cos\alpha = \frac{(a_2)^2 + l^2 - (a_1)^2}{2\, a_2\, l} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a_1\right)^2 - (a_1)^2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}a_1} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 1}{\frac{2\times 3}{4}} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} - 1\right) : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} : \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

y finalmente

$$\boxed{b} = a_2\, \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}a_1}$$

Valor coincidente con el ya obtenido.

$$= \left[2\sqrt{\frac{2}{4} \times \frac{1}{4}} \; : \; \frac{\sqrt{3}}{2} \right] a_1 = \left[\frac{2\sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{3}}{2} \right] a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_1 = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3} a_1}$$

c = Radio de la esfera tangente a las caras

Es igual al radio de la esfera tangente a las aristas de uno de los dos poliedros conjugados dados.

Tomando como base el exaedro, su arista, determinada anteriormente en función de a_1, es de

$$l_6 = a_1$$

y el radio de la esfera tangente a las aristas de este cubo, valdrá (ver fórm. 12, lám. 2)

$$\boxed{c} = b_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} l_6 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} a_1}$$

Se obtendrá este mismo valor partiendo del octaedro, cuya arista

$$l_8 = \sqrt{2}\, a_1$$

y el radio de la esfera tangente (ver fórm. 22, lám. 3)

$$c = b_8 = \frac{1}{2} l_8 = \frac{1}{2} \sqrt{2}\, a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} a_1$$

valor coincidente con el anterior.

l_{III} = Distancia entre los centros de dos caras contiguas

Lámina 31	Poliedros derivados de los regulares De los conjugados exaedro-octaedro	Hoja nº 12

En el estudio que hicimos en la lámina 15 del poliedro obtenido por la intersección del exaedro y octaedro conjugados por sus aristas, vimos que el sólido común a ambos es un poliedro no regular, convexo, compuesto de 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros de lados de igual longitud.

Este poliedro es un caso particular de los más generales denominados "Poliedros arquimedianos" y lo hemos designado con el nombre de "Arquimediano III".

En la lámina 34 se ha efectuado la representación de dicho Arquimediano III, así como el cálculo analítico de sus principales magnitudes, que tienen aplicación a este ejercicio.

En efecto, al unir los centros de dos caras contiguas del poliedro estudiado en esta lámina, se obtiene un "Arquimediano III", cuyo lado l_{III} es la dimensión que deseamos obtener ahora, y cuya esfera circunscrita es coincidente con la esfera tangente a las aristas del exaedro y octaedro dados.

Mas como por otra parte, el radio de la esfera circunscrita al Arquimediano III es igual a su lado (ver lám. 34 (?) fórmula), tendremos finalmente

$$\boxed{l_{III}} = b = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\, a_1}$$

[firma]		7 - 10 - 72

2φ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

Si consideramos el diedro formado por dos caras contiguas en una arista cualquiera del poliedro derivado, y cortamos dicho diedro por un plano perpendicular a la arista, que pase al mismo tiempo por el centro de una de las caras, dicho plano pasará igualmente por el centro de la otra (todas las caras son iguales); las intersecciones de dicho plano con las dos caras, serán lados del ángulo rectilíneo del diedro.

Si unimos seguidamente los centros de las dos caras, se nos formará un triángulo isósceles A·B·C (fig. 4), cuya base C·B es la magnitud l_{III}, ya calculada, y los lados iguales la distancia del centro de la cara a la arista, o sea la manitud p también obtenida anteriormente. El ángulo A opuesto a la base será el buscado.

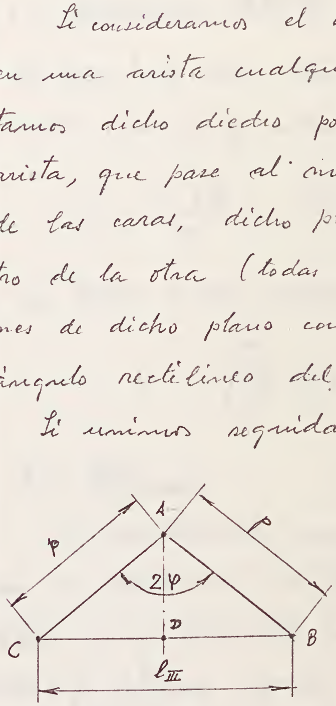


Figura 4

Su valor será:

$$\boxed{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{CD}{CA} = \frac{\frac{1}{2}\, l_{III}}{p} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\, a_1}{\frac{\sqrt{6}}{6}\, a_1} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Su valor numerico, será:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \varphi = 60^\circ \qquad 2\varphi = 120^\circ$$

S = Superficie lateral

El área S_1 de una cara (rombo) se deduce de sus diagonales (fig. 2), y será:

$$S_1 = \frac{l_6 \times l_8}{2} = \frac{a_1 \times \sqrt{2}\, a_1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_1)^2$$

y la total S del poliedro (12 caras)

$$\boxed{S} = 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} (a_1)^2 = \boxed{6\sqrt{2}\,(a_1)^2}$$

V = Volumen

Si consideramos unidos los vértices de una cara, con el centro de la esfera circunscrita al poliedro derivado, se nos formará una pirámide recta de base rómbica y altura igual al radio c de la esfera inscrita. El volumen V_1 de dicha pirámide será pues

$$V_1 = S_1 \times \frac{1}{3} c = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_1)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2 \times 3} (a_1) = \frac{1}{6} (a_1)^3$$

y el volumen V total del poliedro (12 pirámides)

$$\boxed{V} = 12 \times \frac{1}{6} (a_1)^3 = \boxed{2\,(a_1)^3}$$

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores.

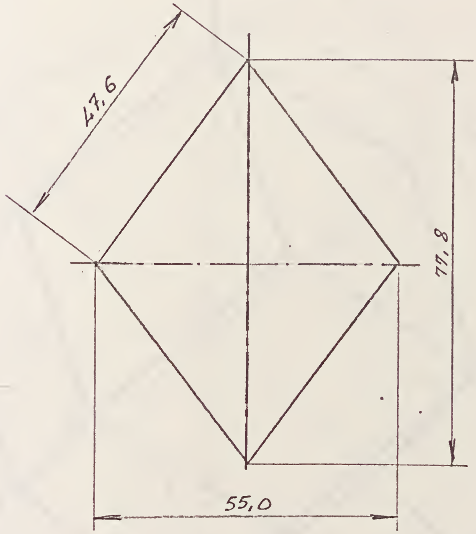
Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ a_1$	$0.86\ 60\ 25\ldots\ a_1$
a_2	$\frac{\sqrt{3}}{2}\ a_1$	$0.86\ 60\ 25\ldots\ a_1$
b	$\frac{\sqrt{6}}{3}\ a_1$	$0{,}81\ 64\ 97\ldots\ a_1$
c	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ a_1$	$0.70\ 71\ 07\ldots\ a_1$
l_8	$\sqrt{2}\ a_1$	$1.41\ 42\ 14\ldots\ a_1$
l_6	a_1	$1.00\ 00\ 00\ldots a_1$
l_{III}	$\frac{\sqrt{2}}{2}\ a_1$	$0{,}70\ 71{\cdot}07\ldots\ a_1$
p	$\frac{\sqrt{6}}{6}\ a_1$	$0{,}40\ 82\ 48\ldots\ a_1$
2φ	$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{sen}\varphi = 0{,}86\ 60\ 25\ldots$ $\varphi = 60°\quad 2\varphi = 120°$
S	$6\sqrt{2}\ (a_1)^2$	$8.48\ 52\ 81\ldots\ (a_1)^2$
V	$2\ (a_1)^3$	$2{,}00\ 00\ 00\ldots\ (a_1)^3$
Relaciones entre magnitudes		
$l = a_2$	$l_8 = 2c = 2\ l_{III}$	$c = l_{III}$

UNE A4 210 X 297

Lámina 31	Poliedros derivados de los regulares De los conjugados exaedro - octaedro	Hoja nº 16

FIGURA CORPÓREA

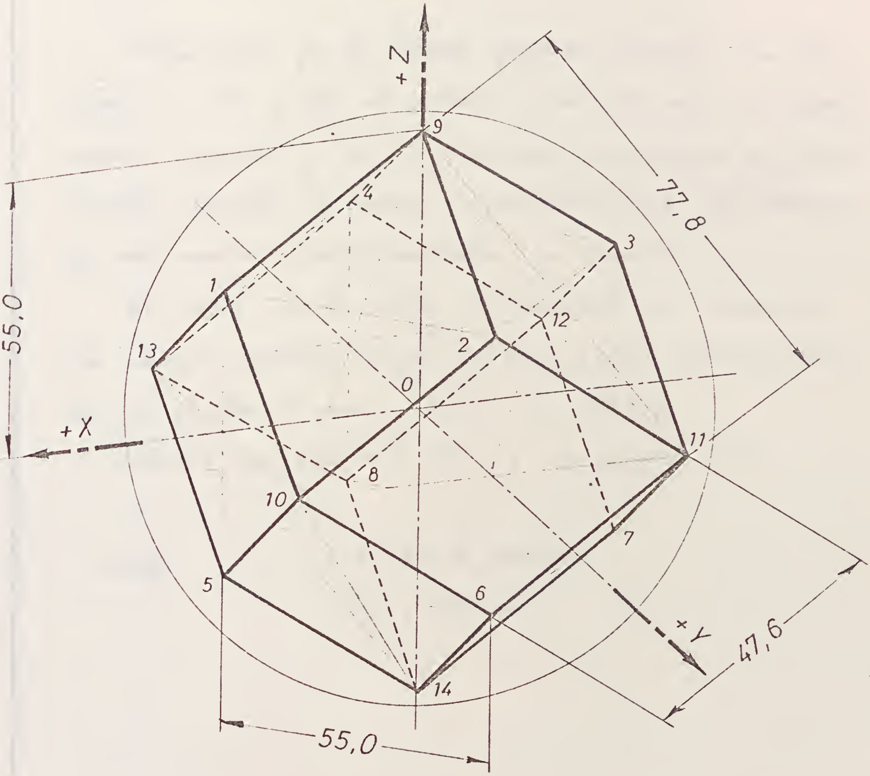
Se obtiene por acoplamiento de 12 rombos, cuyas diagonales son los lados de los dos poliedros conjugados dados.



La longitud de la arista (47,6 mm) sirve de comprobación al trazado.

CEQ		8 - 10 - 72

UNE A4 210 X 297



Derivado de los conjugados exaedro-octaedro

Lámina 32	POLIEDROS DERIVADOS DE LOS REGULARES B) De conjugados de aristas coplanarias y perpendiculares	32

ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico, en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro regular y de su icosaedro conjugado por sus aristas, cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circunscrita al icosaedro (de mayor radio), es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O son: O(72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3V y a escala 1:1.

DATOS

O (72, 72, 85) mm

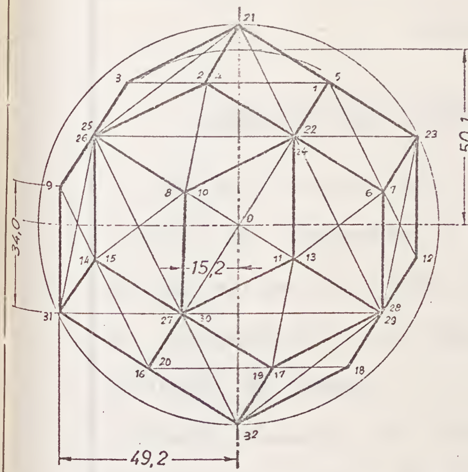
a_{20} = 55 mm

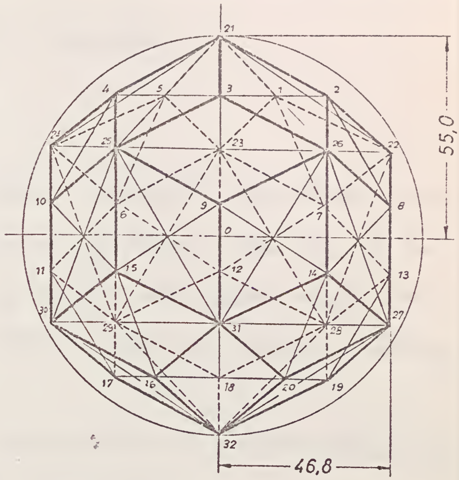
UNE A4 210 X 297

10 - 10 - 72

I

III



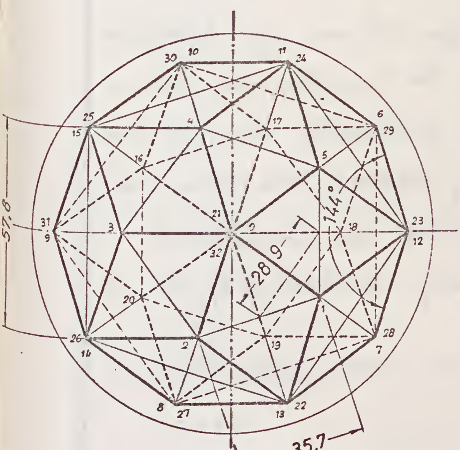


+Z

+X

O

+Y



ENUNCIADO

Representar por el método gráfico-analítico en los planos I, II y III, el poliedro derivado de un dodecaedro regular y de su icosaedro conjugado por sus aristas cuando se unen consecutivamente los extremos de dos aristas correspondientes en ambos.

El radio de la esfera circunscrita al icosaedro es de 55 mm, y las coordenadas de su centro O, son: O (72, 72, 85) mm.

Dibujar en formato A3v y a escala 1 : 1.

NUMERACIÓN DE VÉRTICES

Dodecaedro conjugado (rojo)___ 1 al 20

Icosaedro dado (azul)________ 21 al 32

Poliedro derivado (negro)_____ 1 al 32

+Y

II

	Propuesta	De entrega	Entregada	Calificación	(firma)	Escuela / Curso
Fecha:						
Alumno:						
Escala 1:1	Derivado de los conjugados dodecaedro-icosaedro					Lámina 32 / Curso 19 -19

DODECAEDRO - ICOSAEDRO

CONSIDERACIONES PREVIAS.

En las láminas 16 y 17 hemos estudiado los poliedros conjugados del dodecaedro e icosaedros regulares, obtenidos al trazar por los puntos medios de las aristas del poliedro dado, rectas perpendiculares al plano determinado por dichas aristas y el centro de aquél.

En la lámina 18 hemos representado el poliedro obtenido por la intersección de ambos conjugados.

En la presente lámina 31 vamos a estudiar el poliedro derivado de ambos conjugados cuando se unen sucesivamente los extremos de cada dos aristas correspondientes, con lo cual obtenemos rombos todos iguales, que serán las caras del poliedro pedido.

Previamente al estudio de su trazado, vamos a deducir las propiedades geométricas de este poliedro derivado.

1º Todas sus caras son iguales y tienen la forma de rombos.

En efecto, en los trazados gráficos de la las láminas 16 a 18 puede observarse que las aristas del icosaedro son mayores que las de su dodecaedro conjugado. Esto puede comprobarse analíticamente mediante la fórmula 30, lám. 4, y fórmula 43, lám. 5 siguientes:

Lámina 32	Poliedros derivados de los regulares De los conjugados dodecaedro-icosaedro	Hoja nº 2

$$a_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, l_{12} \qquad y \qquad a_{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, l_{20},$$ en las que

despejando "l_{12}" y l_{20}, tendremos

$$\boxed{l_{12}} = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\, a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{12}} = \frac{4}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}\, a_{12} =$

$$= \frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{15-3}\, a_{12} = \frac{4(\sqrt{15}-\sqrt{3})}{12}\, a_{12} = \boxed{\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\, a_{12}} \qquad y$$

$$\boxed{l_{20}} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\, a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_{20}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{20}} = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{16}{10+2\sqrt{5}}}\, a_{20} =$

$$= \sqrt{\frac{16(10-2\sqrt{5})}{100-20}}\, a_{20} = \sqrt{\frac{16(10-2\sqrt{5})}{80}}\, a_{20} = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_{20}}$$

en las que haciendo $a_{12} = a_{20}$, y siendo

$$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2} = 0,71\ 36\ 44\ldots \qquad y \qquad \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} = 1,05\ 14\ 62\ldots$$

tendremos que

$$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}} > \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}$$

por lo que será

$$l_{20} > l_{12}$$

y con mayor motivo, cuando como en el caso que nos ocupa, es

$$a_{20} > a_6$$

Así pues, al ser $l_{20} > l_{12}$, el cuadrilátero obtenido al unir sucesivamente los extremos de dos aristas correspondientes en los dos poliedros conjugados, son rombos, todos iguales y caras del poliedro derivado.

2ª El número de caras del poliedro derivado, será de 30

En efecto, en virtud de su generación, cada cara contiene una arista del dodecaedro y también otra del icosaedro; en ambos poliedros es de 30 el número de sus aristas.

3ª El número de vértices del poliedro derivado es de 32

Este número será el de la suma de los vértices del dodecaedro (20) y del icosaedro (12).

4ª El poliedro derivado es convexo

Pues al prolongar el plano de cualquiera de sus caras, queda todo él en el mismo semiespacio.

5ª El número de aristas será de 60

Por ser convexo se verificará la relación de Euler, en la que

$$C + V = A + 2$$

de la que se deduce A, ya que conocemos $C = 30$ y $V = 32$. Todas las aristas son iguales

6ª Los ángulos sólidos formados en los vértices del dodecaedro son triedros, y los formados en los vértices del icosaedro, son pentaedros.

puesto que en dichos vértices concurren respectivamente tres o cinco aristas de los poliedros conjugados. Así pues existirán en el poliedro derivado 20 ángulos sólidos triedros y 12 pentaedros.

7º Existe una esfera que pasa por los vértices pentaedros

La circunscrita al icosaedro dado

8º Existe una esfera, concéntrica con la anterior y distinta de ésta, que pasa por los vértices triedros

La circunscrita al dodecaedro conjugado y de menor radio que la anterior.

9º Existe una esfera, concéntrica con las anteriores, tangente a las aristas, no en su punto medio.

Es válida la análoga demostración dada en la lámina 31.

10º Existe una esfera, concéntrica con las anteriores, tangente a todas las caras del poliedro derivado, en el centro del rombo (esfera inscrita).

La esfera común tangente a las aristas de los dos

UNE A4 210 X 297

PROCESO GRÁFICO

El trazado gráfico del poliedro pedido consiste en determinar previamente los vértices del icosaedro dado, y seguidamente los del dodecaedro conjugado.

A continuación bastará unir consecutivamente, formando un cuadrilátero (paralelógramo en las proyecciones), los extremos de cada dos aristas perpendiculares correspondientes (una de cada poliedro); estudiando en cada proyección la visibilidad de las aristas del poliedro buscado, se obtendrá fácilmente la representación de éste.

Para el trazado del icosaedro dado y del dodecaedro conjugado, se seguirá el proceso estudiado en la lámina 18, por lo que omitimos su repetición.

PROCESO GRÁFICO-ANALÍTICO

Para simplificar y dar al mismo tiempo mayor exactitud al trazado, es muy útil el empleo de cotas calculadas previamente en forma analítica.

En este ejercicio consideraremos las siguientes magnitudes del poliedro derivado:

l = Arista del poliedro

a_1 = Radio de la esfera que pasa por los vértices pentaédricos (los del icosaedro dado)

a_2 = Radio de la esfera que pasa por los vértices triedros (los del dodecaedro conjugado)

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

c = Radio de la esfera tangente a las caras.

l_{20} = Arista del icosaedro dado.

l_{12} = Arista del dodecaedro conjugado.

l_{IV} = Distancia entre los centros de dos caras contiguas.

p = Distancia del centro de una cara a uno de sus lados

2φ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas

S = Superficie lateral

V = Volumen.

Todas las magnitudes anteriores las calcularemos en función de a_1, radio de la esfera circunscrita al icosaedro regular dado

---

a_1 = Radio de la esfera que pasa por los vértices pentaédricos

Dato del ejercicio

l_{20} = Arista del icosaedro dado

De la fórmula 165 de la lámina 16, se obtiene que

$a_1 = a'_{20} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l_{12}$ y de la fórmula 164, que

$$\boxed{l_{20}} = l'_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, l_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{20}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 =$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5+2\sqrt{5}}\, a_1 = \frac{(1+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{25-20}\, a_1 =$$

$$= \frac{(5+5\sqrt{5}-2\sqrt{5}-10)\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\, a_1 = \frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\, a_1 = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(3\sqrt{5}-5)^2}}{5}\, a_1 =$$

$$= \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(45+25-30\sqrt{5})}}{5}\, a_1 = \frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})(70-30\sqrt{5})}}{5}\, a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})(14-6\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \sqrt{\frac{2(5+2\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \sqrt{\frac{2(35+14\sqrt{5}-15\sqrt{5}-30)}{5}}\, a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}$$

l_{12} = Arista del dodecaedro conjugado

De la fórmula 165, lám. 16, se deduce

$$a_1 = a'_{20} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\, l_{12} \qquad \text{de donde}$$

$$\boxed{l_{12}} = \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 = \boxed{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{l_{12}} = \frac{2}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}\, a_1 = \frac{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5+2\sqrt{5}}\, a_1 =$

$$= \frac{2(5-2\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{25-20}\, a_1 = \frac{2\sqrt{(5+2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})^2}}{5}\, a_1 = \frac{2\sqrt{(25-20)(5-2\sqrt{5})}}{5}\, a_1 =$$

$$= \frac{2\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}}{5}\, a_1 = \boxed{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}$$

<u>l = Arista del poliedro</u>

l_{20} y l_{12} son las diagonales del rombo que forma una cara, por lo que (fig. 1)

$$\boxed{l} = \sqrt{\left(\frac{l_{20}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l_{12}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1\right)^2} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{l} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{10-2\sqrt{5}}{5}\times(a_1)^2 + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}(a_1)^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}+10-4\sqrt{5}}{10}}\, a_1 = \sqrt{\frac{15-5\sqrt{5}}{10}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1}$$

p = <u>Distancia del centro de una cara a uno de sus lados</u>

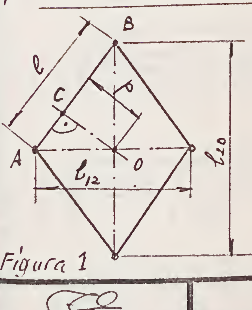


Figura 1

En la figura 1 hemos representado una cara del poliedro pedido (rombo de diagonales l_{20} y l_{12}).

Tracemos por $\underline{0}$ la perpendicu-

lar al lado $\underline{AB}$, siendo $\underline{C}$ el pie de la misma.

Los triángulos rectángulos $\underline{A \cdot O \cdot B}$ y $\underline{AOC}$ son semejantes (ángulo $\underline{C \cdot A \cdot O}$ común), por lo que

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BO}} \quad \text{de donde} \quad \overline{OC} = \frac{\overline{AO} \times \overline{BO}}{\overline{AB}}$$

y sustituyendo los valores $\overline{OC} = p$, $\overline{AO} = \dfrac{l_{12}}{2}$, $\overline{BO} = \dfrac{l_{20}}{2}$, $\overline{AB} = l$,

tendremos:

$$p = \frac{\frac{1}{2} l_{12} \times \frac{1}{2} l_{20}}{l} = \frac{l_{12} \times l_{20}}{4 l} ;$$

los valores l_{12}, l_{20} y l, son ya conocidos anteriormente

por lo que

$$\boxed{p} = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1} = \boxed{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{p} = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1}{4\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1} = \frac{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}{2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{25}} : \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right) a_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}{25} : \frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5}) \times 2(5-\sqrt{5})}{25(3-\sqrt{5})}}\, a_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{25-10\sqrt{5}-5\sqrt{5}+10}{3-\sqrt{5}}}\, a_1 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{35-15\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}\, a_1 = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(7-3\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}}\, a_1$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(7-3\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}}\, a_1 = \frac{1}{10}\sqrt{5(21-9\sqrt{5}+7\sqrt{5}-15)}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{10}\sqrt{5(6-2\sqrt{5})}\, a_1 = \frac{1}{10}\sqrt{10(3-\sqrt{5})}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}$$

a_2 = Radio de la esfera que pasa por los vértices triedros

Es el radio de la esfera circunscrita al dodecaedro conjugado de lado l_{12}, siendo el valor de éste, en función de a_1

$$l_{12} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1$$

y teniendo en cuenta la fórm. 30, lám. 4

$$\boxed{a_2} = a_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\, l_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{a_2} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$

$$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{15}+\sqrt{3})^2 \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(15+3+2\sqrt{45}) \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(18+6\sqrt{5}) \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6(3+\sqrt{5}) \times \frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}(3+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}(15+5\sqrt{5}-6\sqrt{5}-10)}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}(5-\sqrt{5})}\, a_1 = \sqrt{\frac{6(5-\sqrt{5})}{20}}\, a_1 =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1}$$

b = Radio de la esfera tangente a las aristas.

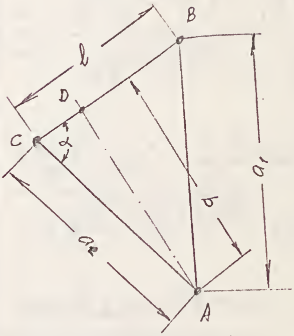


Figura 2

Si unimos los extremos C y B (fig. 2) de una arista del poliedro derivado, con el centro A de su esfera circunscrita, se nos formará el triángulo A·B·C, de lados $CB = l$; $AC = a_2$ y $AB = a_1$.

La altura $AD = b$, correspondiente al lado l, será el radio pedido, por lo que

$$b = a_2 \text{ sen } \alpha \qquad (1)$$

El valor del ángulo α, se deduce de la fórmula trigonométrica

$$(a_1)^2 = (a_2)^2 + l^2 - 2 a_2 \, l \cos\alpha$$

de la que

$$\cos\alpha = \frac{(a_2)^2 + l^2 - (a_1)^2}{2 a_2 \, l}$$

en la que sustituyendo los valores ya deducidos de

$$a_2 = \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1 \qquad y \qquad l = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1$$

tendremos que

$$\boxed{\cos\alpha} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1\right)^2 - (a_1)^2}{2\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\, a_1} = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{\cos\alpha} = \frac{\left(\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\,a_1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,a_1\right)^2 - (a_1)^2}{2\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\,a_1 \times \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\,a_1} =$$

$$= \frac{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}(a_1)^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(a_1)^2 - (a_1)^2}{2\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}}\,(a_1)^2} = \frac{\frac{15-3\sqrt{5}}{10} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1}{2\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{20}}} =$$

$$= \frac{\frac{15-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}-10}{10}}{\sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})\times(3-\sqrt{5})}{5}}} = \frac{\frac{20-8\sqrt{5}}{10}}{\sqrt{\frac{3(15-3\sqrt{5}-5\sqrt{5}+5}{5}}} = \frac{\frac{10-4\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{\frac{3(20-2\sqrt{5})}{5}}} =$$

$$= \frac{\frac{2(5-2\sqrt{5})}{5}}{\sqrt{\frac{12(5-2\sqrt{5})}{5}}} = \frac{\frac{2}{5}(5-2\sqrt{5})}{2\sqrt{\frac{3}{5}(5-2\sqrt{5})}} = \frac{1}{5} \times \frac{(5-2\sqrt{5})}{\sqrt{\frac{3}{5}(5-2\sqrt{5})}} =$$

$$= \frac{1}{5} \times \sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})^2}{\frac{3}{5}(5-2\sqrt{5})}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5(5-2\sqrt{5})}{3}} = \boxed{\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}}$$

De aquí se deduce que

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen}\alpha} = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}\right)^2} =$

$$= \sqrt{1-\frac{5-2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{\frac{15-5+2\sqrt{5}}{15}} = \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{15}} = \boxed{\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}}}$$

Valor que sustituido en la expresión inicial (1), nos da

$$\boxed{b} = a_2 \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{b} = \sqrt{\frac{3(5-\sqrt{5})}{10}}\, a_1 \times \sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{15}} = \sqrt{\frac{3\times 2\times(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{10\times 15}}\, a_1 = \sqrt{\frac{5^2-5}{5\times 5}}\, a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{20}{25}}\, a_1 = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}\, a_1}$$

---

c - Radio de la esfera tangente a las caras

Es igual al radio de la esfera tangente a las aristas de uno de los poliedros dados.

Tomando como base el dodecaedro, su arista, determinada anteriormente en función de a_1, es

$$l_{12} = 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1$$

y el radio de la esfera tangente a las aristas de este dodecaedro, valdrá (ver fórm. 31, lám. 4)

$$\boxed{c} = b_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{c} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{5}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(9+5+6\sqrt{5})}{5}}\,a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{5})(14+6\sqrt{5})}{5}}\,a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}{5}}\,a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(35-14\sqrt{5}+15\sqrt{5}-30)}{5}}\,a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}\,a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})}{10}}\,a_1}$$

Este mismo valor se obtiene partiendo del icosaedro, cuya arista es

$$l_{20} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,a_1$$

y el radio de la esfera tangente (ver fórm. 44, lám. 5)

$$\boxed{C} = b_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{C} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,a_1 =$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5}}\,a_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{5}}\,a_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5}}\,a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{5}}\,a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\,a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5+\sqrt{5})}{5}}\,a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,a_1}$$

<u>l_{IV} = Distancia entre los centros de dos caras contiguas</u>

En el estudio que hicimos en la lámina 18 del polie-

dro obtenido por la intersección del dodecaedro e icosaedro conjugados por sus aristas, vimos que el sólido común a ambos es un poliedro no regular, convexo, compuesto de 12 pentágonos regulares y 20 triángulos equiláteros de lados de igual longitud.

Este poliedro es un caso particular de los más generales denominados "Poliedros arquimedianos" y lo hemos designado con el nombre de "Arquimediano III".

En la lámina 35 se ha efectuado la representación de dicho Arquimediano III, así como el cálculo analítico de sus principales magnitudes que tienen aplicación a este ejercicio.

En efecto, al unir los centros de dos caras contiguas del poliedro estudiado en esta lámina, se obtiene un "Arquimediano IV" cuyo lado l_{IV} es la dimensión que deseamos obtener ahora, y cuya esfera circunscrita es coincidente con la esfera tangente a las aristas del dodecaedro e icosaedro dados.

Mas como por otra parte el radio de la esfera circunscrita al Arquimediano IV es igual a (ver lám. 35 fórm.)

$$a_{IV} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\; l_{IV}$$

se verificará igualmente (ver lám. 16, fórm. 166), en función del icosaedro: $a_{IV} = b'_{20} = \frac{3+\sqrt{5}}{4}\, l_{12} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\, a_1$

por lo que igualando expresiones

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\; l_{IV} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\; a_1$$ de donde

$$\boxed{l_{IV}} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{l_{IV}} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{4} \times 2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\, a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5} : \frac{3+\sqrt{5}}{2}}\; a_1 =$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}\; a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}{5(3+\sqrt{5})}}\; a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}\; a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(15-6\sqrt{5}+5\sqrt{5}-10)}\; a_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10}(5-\sqrt{5})}\; a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\; a_1}$$

Al mismo resultado llegaríamos tomando el radio de la esfera tangente a la arista del dodecaedro dado.

Entonces tendríamos (ver lám. 17, fórm. 183)

$$a_{IV} = b'_{12} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\, l_{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\; a_1$$

que juntamente con la

$$a_{IV} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\, l_{IV}$$

nos permite despejar l_{IV}, así:

$$\boxed{l_{IV}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\, a_1 = \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$\boxed{l_{IV}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\, a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})}{5} : \frac{3+\sqrt{5}}{2}}\; a_1 =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{4(5-\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}\, a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5(3+\sqrt{5})}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{5(3+\sqrt{5})}}\, a_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(1+5+2\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{5(3+\sqrt{5})}}\, a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}(5-\sqrt{5})}\, a_1 =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}$$

valor coincidente con el anterior

2Ψ = Ángulo rectilíneo del diedro formado por dos caras contiguas.

Si consideramos el diedro formado por dos caras contiguas en una arista cualquiera del poliedro derivado,

y cortamos dicho diedro por un plano perpendicular a la arista, que pase al mismo tiempo por el centro de una de las caras, dicho plano pasará igualmente por el centro de la otra (todas las caras son iguales); las intersecciones de dicho plano con las dos caras, serán los lados del ángulo rectilíneo del diedro.

Si unimos seguidamente los centros de las dos caras, se nos formará un triángulo isósceles $\underline{A \cdot B \cdot C}$ (fig. 3), cuya base $\underline{C \cdot B}$ es la magnitud "l_{IV}", ya calculada, y los lados iguales la distancia del centro de la cara a la arista (fig. 2), o sea la magnitud $\underline{p}$ también obtenida anteriormente. El ángulo $\underline{A}$ opuesto a la base, será el buscado, por lo que

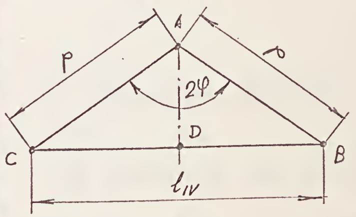


Figura 3

$$\boxed{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{CD}{CA} = \frac{\frac{1}{2} l_{IV}}{p} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\, a_1} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{\operatorname{sen} \varphi} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\, a_1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\, a_1} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10} : \frac{3-\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$$

Su valor numérico será

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7,23\ 60\ 67\ 98}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3,61\ 80\ 33\ 99}$$

$$\lg \operatorname{sen} \varphi = \log.\ 0,5 \text{ ——— } \bar{1},698\ 97\ 00$$

$$+\frac{1}{2}\lg 3,61\ 80\ 33\ 99 = \frac{0,558\ 47\ 27}{2} = +\ 0,279\ 23\ 63$$

$$\bar{1},978\ 20\ 63 = \lg \operatorname{sen} \varphi$$

$$\varphi = 72^\circ \qquad 2\varphi = 144^\circ$$

<u>S = Superficie lateral</u>

El área S_1 de una cara (rombo) se deduce de sus diagonales (fig. 1) y será:

$$\boxed{S_1} = \frac{l_{12} \times l_{20}}{2} = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\,a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,a_1}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}-5}{5}(a_1)^2}$$

Desarrollo del cálculo anterior:

$$S_1 = \frac{2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\,a_1 \times \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,a_1}{2} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5} \times \frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,(a_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{2(5-2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}\,(a_1)^2 = \frac{1}{5}\sqrt{2(25-10\sqrt{5}-5\sqrt{5}+10)}\,(a_1)^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{2(35-15\sqrt{5})}\,(a_1)^2 = \frac{1}{5}\sqrt{2\times 5\,(7-3\sqrt{5})}\,(a_1)^2 = \sqrt{\frac{2(7-3\sqrt{5})}{5}}\,(a_1)^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}} \times \sqrt{7-3\sqrt{5}}\,(a_1)^2 =$$ y por ser $7^2-(3\sqrt{5})^2 = 4$, tendremos

UNE A4 210 X 297

$$= \sqrt{\frac{2}{5}} \times \left(\sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}\right)(a_1)^2 = \left(\sqrt{\frac{18}{10}} - \sqrt{\frac{10}{10}}\right)(a_1)^2 = \left(\sqrt{\frac{9}{5}} - 1\right)(a_1)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1\right)(a_1)^2 = \left(\frac{3\sqrt{5}}{5} - 1\right)(a_1)^2 = \frac{3\sqrt{5} - 5}{5}(a_1)^2$$

y la superficie total del poliedro (30 caras)

$$\boxed{S} = 30 \times \frac{3\sqrt{5} - 5}{5}(a_1)^2 = \boxed{6\,(3\sqrt{5} - 5)(a_1)^2}$$

<u>V = Volumen</u>

Si consideramos unidos los vértices de una cara, con el centro de la esfera circunscrita al poliedro derivado, se nos formará una pirámide recta de base rómbica y altura igual al radio $\underline{c}$ de la esfera inscrita. El volumen V_1 de dicha pirámide será pues

$$\boxed{V_1} = S_1 \times \frac{1}{3} c = \left(\frac{3\sqrt{5} - 5}{5}(a_1)^2\right) \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}(a_1) = \boxed{\frac{2}{15}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,(a_1)^3}$$

Desarrollo del cálculo anterior: $\boxed{V_1} = \left[\frac{3\sqrt{5} - 5}{5}(a_1)^2\right] \times \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}(a_1) =$

$$= \frac{3\sqrt{5} - 5}{5} \times \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}(a_1)^3 = \frac{3\sqrt{5} - 5}{15}\sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})}{10}}(a_1)^3 = \frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(3\sqrt{5} - 5)^2}{10}}(a_1)^3 =$$

$$= \frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(45 + 25 - 30\sqrt{5})}{10}}(a_1)^3 = \frac{1}{15}\sqrt{\frac{(5 + \sqrt{5})(70 - 30\sqrt{5})}{10}}(a_1)^3 =$$

$$= \frac{1}{15}\sqrt{(5 + \sqrt{5})(7 - 3\sqrt{5})}\,(a_1)^3 = \frac{1}{15}\sqrt{35 + 7\sqrt{5} - 15\sqrt{5} - 15}\,(a_1)^3 =$$

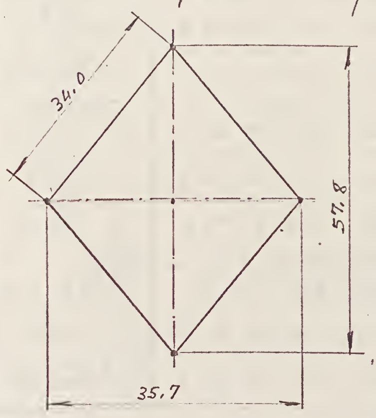
$$= \frac{1}{15}\sqrt{20-8\sqrt{5}}\,(a_1)^3 = \boxed{\frac{2}{15}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,(a_1)^3}$$

Y el volumen V total del poliedro (30 pirámides iguales)

$$V = 30 \times \frac{2}{15}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,(a_1)^3 = 4\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,(a_1)^3$$

FIGURA CORPÓREA

Se obtiene por acoplamiento de 30 rombos, cuyas diagonales son los lados de los poliedros conjugados dados.



La longitud de la arista (34,0 mm) sirve de comprobación al trazado.

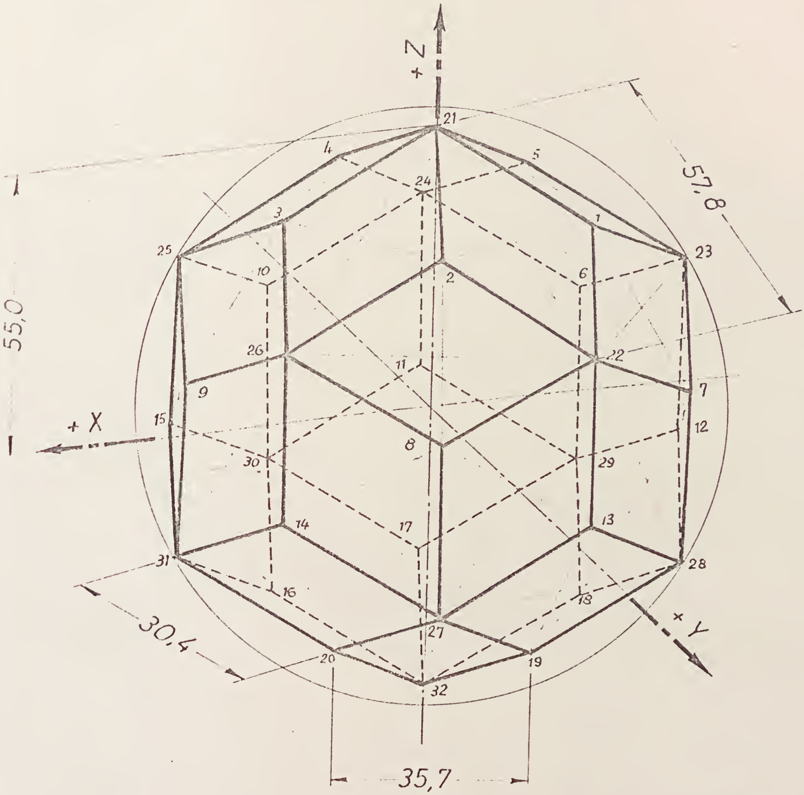
Lámina 32	Poliedros derivados de los regulares De los conjugados dodecaedro-icosaedro	Hoja nº 22

En el cuadro sinóptico que damos a continuación, resumimos los resultados anteriores:

Magnitud	Valor exacto	Valor decimal aproximado
l	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\ a_1$	$0{,}61\ 80\ 34\ldots\ a_1$
a_2	$\sqrt{\frac{3\,(5-\sqrt{5})}{10}}\ a_1$	$0{,}91\ 05\ 93\ldots\ a_1$
b	$\frac{2\sqrt{5}}{5}\ a_1$	$0{,}89\ 44\ 27\ldots\ a_1$
c	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\ a_1$	$0{,}85\ 06\ 51\ldots\ a_1$
l_{20}	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\ a_1$	$1.\ 05\ 14\ 62\ldots\ a_1$
l_{12}	$2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\ a_1$	$0{,}\ 64\ 98\ 39\ldots\ a_1$
l_{IV}	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\ a_1$	$0{,}\ 52\ 57\ 31\ldots\ a_1$
p	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{10}}\ a_1$	$0.\ 27\ 63\ 93\ldots\ a_1$
2φ	$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	$\log.\ \operatorname{sen}\varphi = \bar{1},978\ 20\ 63$ $\varphi = 72^\circ \quad 2\varphi = 144^\circ$
S	$6\left(3\sqrt{5}-5\right)(a_1)^2$	$10{,}\ 24\ 92\ 24\ldots\ (a_1)^2$
V	$4\sqrt{5-2\sqrt{5}}\ (a_1)^3$	$2{,}\ 90\ 61\ 70\ldots\ (a_1)^3$

UNE A4 210 X 297

[signature]		30-10-72



Derivado de los conjugados dodecaedro-icosaedro